Matematisk-fysiske Skrifter
udgivet af
Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab
Bind **1**, no. 2

Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. **1**, no. 2 (1956)

SUR LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR

N. E. NÖRLUND

København 1956
i kommission hos Ejnar Munksgaard

DET KONGELIGE DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB udgiver følgende publikationsrækker:

L'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark publie les séries suivantes:

	Bibliografisk forkortelse *Abréviation bibliographique*
Oversigt over selskabets virksomhed (8°) *(Annuaire)*	Overs. Dan. Vid. Selsk.
Historisk-filologiske Meddelelser (8°)	Hist. Filol. Medd. Dan. Vid. Selsk.
Historisk-filologiske Skrifter (4°) *(Histoire et Philologie)*	Hist. Filol. Skr. Dan. Vid. Selsk.
Arkæologisk-kunsthistoriske Meddelelser (8°)	Arkæol. Kunsthist. Medd. Dan. Vid. Selsk.
Arkæologisk-kunsthistoriske Skrifter (4°) *(Archéologie et Histoire de l'Art)*	Arkæol. Kunsthist. Skr. Dan. Vid. Selsk.
Filosofiske Meddelelser (8°) *(Philosophie)*	Filos. Medd. Dan. Vid. Selsk.
Matematisk-fysiske Meddelelser (8°)	Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.
Matematisk-fysiske Skrifter (4°) *(Mathématiques et Physique)*	Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk.
Biologiske Meddelelser (8°)	Biol. Medd. Dan. Vid. Selsk.
Biologiske Skrifter (4°) *(Biologie)*	Biol. Skr. Dan. Vid. Selsk.

Selskabets sekretariat og postadresse: Dantes plads 5, København V

L'adresse postale du secrétariat de l'Académie est:

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab,
Dantes plads 5, København V, Danmark.

Selskabets kommissionær: EJNAR MUNKSGAARD's forlag, Nørregade 6, København K.

Les publications sont en vente chez le commissionnaire:
EJNAR MUNKSGAARD, *éditeur, Nørregade 6, København K, Danmark.*

Matematisk-fysiske Skrifter
udgivet af
Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab
Bind **1**, no. 2

Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. **1**, no. 2 (1956)

SUR LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR

N. E. NÖRLUND

København 1956
i kommission hos Ejnar Munksgaard

Synopsis.

The hypergeometric differential equation $Q(\vartheta)\,y - z\,R(\vartheta)\,y = 0$, where $\vartheta = z\,d/dz$, is considered. $Q(z)$ and $R(z)$ are polynomials of the same degree and the equation has three singularities, at $z = 0, 1, \infty$. Integral representations of the solutions are given and the conditions of their validity are obtained.

PRINTED IN DENMARK
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A-S

Introduction.

1. Je m'occupe, dans ce Mémoire, des séries hypergéométriques de la forme

$$F\left(\begin{matrix}\alpha_1\,\alpha_2\,.\,.\,.\;\;\alpha_n\\ \gamma_1\,\gamma_2\,.\,.\,.\,\gamma_{n-1}\end{matrix}\middle|\,z\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_\nu\,(\alpha_2)_\nu\,.\,.\,.\,(\alpha_n)_\nu}{\nu\,!\,(\gamma_1)_\nu\,.\,.\,.\,(\gamma_{n-1})_\nu}\,z^\nu, \tag{1}$$

où

$$(\alpha)_\nu=\alpha\,(\alpha+1)\,.\,.\,.\,(\alpha+\nu-1),\quad (\alpha)_0=1\,.$$

Lorsque la variable z est omise on suppose toujours que $z=1$. On sait que le cas $n=2$ a fait l'objet de recherches classiques dues à Euler, Gauss, Kummer et Riemann. Les fonctions d'ordre supérieur ont été considérées par un grand nombre d'auteurs parmi lesquels nous mentionnerons particulièrement Goursat [17–19], Thomae [65–66], Pochhammer [59] et Winkler [70]. Dans l'étude de ces fonctions on peut tirer parti de la théorie de l'intégrale de Laplace, perfectionnée récemment surtout par G. Doetsch [8–9].

Considérons l'équation différentielle

$$z^n\,(1-z)\,\frac{d^n\,y}{dz^n}+\sum_{\nu=0}^{n-1}(a_\nu-b_\nu\,z)\,z^\nu\,\frac{d^\nu\,y}{dz^\nu}=0\,.$$

Elle admet trois points singuliers $z=0$, 1 et ∞. En appliquant l'opérateur $\vartheta\,y=z\,\dfrac{dy}{dz}$ elle peut s'écrire

$$(\vartheta-\gamma_1)\,(\vartheta-\gamma_2)\,.\,.\,.\,(\vartheta-\gamma_n)\,y-z\,(\vartheta+\alpha_1)\,(\vartheta+\alpha_2)\,.\,.\,.\,(\vartheta+\alpha_n)\,y=0\,. \tag{2}$$

Si les γ_i sont distinctes et ne diffèrent pas l'une de l'autre par des entiers on sait qu'elle admet, dans le cercle $|z|<1$, n solutions linéairement indépendantes de la forme

$$y_s(z)=z^{\gamma_s}\,F\left(\begin{matrix}\alpha_1+\gamma_s & \alpha_2+\gamma_s & \ldots & \alpha_n+\gamma_s\\ \gamma_s-\gamma_1+1 & \gamma_s-\gamma_2+1 & \ldots * \ldots & \gamma_s-\gamma_n+1\end{matrix}\middle|\,z\right),\qquad s=1,2,\ldots n, \tag{3}$$

où $*$ indique que $\gamma_s-\gamma_s+1$ doit être omis. Il y a lieu de remarquer que, si l'on change z en $\dfrac{1}{z}$, l'équation (2) ne change pas quand on permute en même temps α et γ. En effectuant cette transformation sur une solution quelconque on obtient donc une nouvelle solution que nous désignerons par la même lettre barrée. Si les α_i sont distinctes et ne diffèrent pas par des entiers on a donc n solutions linéairement indépendantes de la forme

$$\bar{y}_s(z) = z^{-\alpha_s} F\left(\begin{matrix} \alpha_s+\gamma_1 & \alpha_s+\gamma_2 & \dots & \alpha_s+\gamma_n \\ \alpha_s-\alpha_1+1 & \alpha_s-\alpha_2+1 & \dots * \dots & \alpha_s-\alpha_n+1 \end{matrix}\middle| \frac{1}{z}\right), \qquad s = 1, 2, \dots n \tag{4}$$

et ces séries convergent si $|z| > 1$. Il est souvent avantageux de multiplier ces solutions par certains facteurs constants. Nous poserons par la suite

$$y_s^*(z) = y_s(z) \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_\nu+\gamma_s)}{\Gamma(\gamma_s-\gamma_\nu+1)}, \qquad \bar{y}_s^*(z) = \bar{y}_s(z) \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_s+\gamma_\nu)}{\Gamma(\alpha_s-\alpha_\nu+1)} \tag{5}$$

Entre ces solutions et leurs prolongements analytiques on a les relations bien connues

$$y_s^*(z) = \sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pi i(\alpha_r+\gamma_s)}}{\sin\pi(\alpha_r+\gamma_s)} \bar{B}_r \bar{y}_r^*(z), \qquad 2\pi > \arg z > 0 \tag{6}$$

$$\bar{y}_s^*(z) = \sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pi i(\alpha_s+\gamma_r)}}{\sin\pi(\alpha_s+\gamma_r)} B_r y_r^*(z), \qquad 2\pi > \arg\frac{1}{z} > 0 \tag{7}$$

où

$$B_r = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \sin\pi(\alpha_\nu+\gamma_r)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}{}' \sin\pi(\gamma_\nu-\gamma_r)}, \qquad \bar{B}_r = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \sin\pi(\alpha_r+\gamma_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}{}' \sin\pi(\alpha_\nu-\alpha_r)}. \tag{8}$$

L'accent dont est affecté le signe $\prod$ veut dire que ν prend les valeurs 1, 2, ... n à l'exclusion de la valeur r.

Dans un travail récent [50] nous avons considéré ces fonctions. Rappelons brièvement les résultats et notations dont nous allons faire usage ci-après. Posons

$$\beta_n = n - 1 - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \gamma_i). \tag{9}$$

Si β_n n'est pas un entier négatif l'équation (2) admet une solution $\xi_n(z)$ qui se représente, dans le cercle $|z-1| < 1$, par une série de la forme

$$\xi_n(z) = z^{\gamma_i}(1-z)^{\beta_n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu,n}^{(i)}}{(\beta_n+1)_\nu} (1-z)^\nu, \qquad i = 1, 2, \dots n \tag{10}$$

les $c_{\nu,n}^{(i)}$ étant des fonctions rationnelles entières des paramètres $\alpha_1 \dots \alpha_n$ et $\gamma_1 \dots \gamma_n$ avec $c_{0,n}^{(i)} = 1$. Soit $\bar{c}_{\nu,n}^{(i)}$ le polynôme qui se déduit de $c_{\nu,n}^{(i)}$ en permutant α et γ. Lorsqu'on change z en $\frac{1}{z}$ et qu'on permute α et γ dans (10) on trouve la solution

$$\bar{\xi}_n(z) = z^{-\alpha_i}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\beta_n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_{\nu,\,n}^{(i)}}{(\beta_n+1)_\nu}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu}, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{11}$$

et ces séries convergent dans le demi-plan $\Re(z) > \frac{1}{2}$. Évidemment $\bar{\xi}_n(z)$ ne diffère de $\xi_n(z)$ que par un facteur constant $e^{\pm\pi i\beta_n}$. Les polynômes $c_{\nu,\,n}^{(i)}$ sont d'une simplicité remarquable et ils jouent un rôle considérable dans l'étude des fonctions hypergéométriques. Il y a entre eux un grand nombre de relations que nous avons mises en évidence. On peut les calculer, soit directement par une équation linéaire aux différences finies d'ordre $n-1$, soit par récurrence en exprimant les $c_{\nu,\,n}^{(i)}$ par les $c_{\nu,\,n-1}^{(i)}$. On a en effet

$$c_{\nu,\,n}^{(n)} = (\beta_{n-1}+1)_\nu \sum_{s=0}^{\nu} \frac{(1-\alpha_n-\gamma_i)_{\nu-s}}{(\nu-s)!}\,\frac{c_{s,\,n-1}^{(i)}}{(\beta_{n-1}+1)_s}, \qquad i = 1, 2, \ldots n-1 \tag{12}$$

$$c_{\nu,\,n}^{(i)} = (\alpha_n+\beta_n+\gamma_i)_\nu \sum_{s=0}^{\nu} \frac{(1-\alpha_n-\gamma_n)_{\nu-s}}{(\nu-s)!}\,\frac{c_{s,\,n-1}^{(i)}}{(\alpha_n+\beta_n+\gamma_i)_s}, \qquad i = 1, 2, \ldots n-1. \tag{13}$$

On peut aisément voir comment se comportent les $c_{\nu,\,n}^{(i)}$ pour les valeurs très grandes de ν. On a l'égalité asymptotique

$$\frac{c_{\nu,\,n}^{(i)}}{\Gamma(\beta_n+\nu+1)} = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq 1}}^{n} \left[k_s \nu^{\gamma_i-\gamma_s-1} + O(|\nu^{\gamma_i-\gamma_s-2}|)\right], \tag{14}$$

les k_s étant des constantes indépendantes de ν. La fonction $\xi_n(z)$ satisfait à la relation

$$\int_0^1 z^{x-1}\,\xi_n(z)\,dz = \Gamma(\beta_n+1)\prod_{s=1}^{n}\frac{\Gamma(x+\gamma_s)}{\Gamma(x-\alpha_s+1)}, \tag{15}$$

l'intégrale étant convergente si $\Re(\beta_n) > -1$ et $\Re(x+\gamma_s) > 0$, $s = 1, 2, \ldots n$. De même

$$\int_1^\infty z^{x-1}\,\bar{\xi}_n(z)\,dz = \Gamma(\beta_n+1)\prod_{s=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_s-x)}{\Gamma(1-\gamma_s-x)} \tag{16}$$

pourvu que $\Re(\beta_n) > -1$ et $\Re(x) < \Re(\alpha_s)$, $s = 1, 2, \ldots n$.

Si β_n est un entier négatif, soit $-$p, la série (10) n'a pas de sens. Mais dans ce cas l'équation (2) admet une solution $\eta_n(z)$, holomorphe au point $z = 1$, qui se représente par les séries

$$\eta_n(z) = z^{\gamma_i}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_{\nu+p,\,n}^{(i)}}{\nu!}(1-z)^\nu, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{17}$$

convergentes pour $|z-1| < 1$, et par les séries

$$\eta_n(z) = (-1)^p z^{-\alpha_i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\bar{c}^{(i)}_{\nu+p,\,n}}{\nu!} \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu}, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{18}$$

convergentes dans le demi-plan $\Re(z) > \frac{1}{2}$. La fonction $\eta_n(z)$ satisfait à la relation

$$\int_0^1 z^{x-1} \eta_n(z)\, dz = \prod_{s=1}^{n} \frac{\Gamma(x+\gamma_s)}{\Gamma(x-\alpha_s+1)} - q(x), \qquad \Re(x+\gamma_s) > 0 \tag{19}$$

$q(x)$ étant le polynôme du degré $p-1$

$$q(x) = \sum_{\nu=0}^{p-1} c^{(i)}_{p-1-\nu,\,n} (x+\gamma_i-\nu)_{\nu}, \qquad i = 1, 2, \ldots n. \tag{20}$$

De même on a

$$(-1)^p \int_1^{\infty} z^{x-1} \eta_n(z)\, dz = \prod_{s=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_s - x)}{\Gamma(1-\gamma_s-x)} - \bar{q}(x), \qquad \Re(x-\alpha_s) < 0 \tag{21}$$

$\bar{q}(x)$ étant le polynôme

$$\bar{q}(x) = \sum_{\nu=0}^{p-1} \bar{c}^{(i)}_{p-1-\nu,\,n} (\alpha_i - x - \nu)_{\nu}, \qquad i = 1, 2, \ldots n. \tag{22}$$

Entre ces deux polynômes existe la relation

$$q(x) + (-1)^p \bar{q}(x) = 0. \tag{23}$$

Soient r et s deux entiers positifs $\leq n$ et différents l'un de l'autre. Considérons une solution $y_{s,r}(z)$ définie par la relation

$$y^*_r(z) - y^*_s(z) = \frac{\sin \pi(\gamma_s - \gamma_r)}{\pi} y_{s,r}(z). \tag{24}$$

Elle est holomorphe au point $z = 1$ et elle se représente par la série de polynômes hypergéométriques

$$y_{s,r}(z) = C_1 z^{\gamma_r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1+\gamma_r)_{\nu} (\alpha_2+\gamma_r)_{\nu}}{\nu!\,(\alpha_1+\alpha_2+\gamma_r+\gamma_s)_{\nu}} F\left(\begin{matrix} -\nu & \alpha_3+\gamma_r & \alpha_4+\gamma_r \ldots & \alpha_n+\gamma_r \\ \gamma_r-\gamma_1+1 & \gamma_r-\gamma_2+1 & \ldots ** \ldots & \gamma_r-\gamma_n+1 \end{matrix}\middle|\, z\right) \tag{25}$$

où les deux astérisques indiquent que $\gamma_r - \gamma_s + 1$ et $\gamma_r - \gamma_r + 1$ doivent être omis; C_1 est la constante

$$C_1 = \frac{\Gamma(\alpha_1+\gamma_s)\,\Gamma(\alpha_2+\gamma_s) \prod_{\nu=1}^{n} \Gamma(\alpha_\nu+\gamma_r)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\gamma_r+\gamma_s) \prod_{\nu=1,\,\nu\neq s}^{n} \Gamma(\gamma_r-\gamma_\nu+1)}.$$

La série (25) converge si $|z-1|<1$ et $\Re(\alpha_\nu+\gamma_s)>0$, $\nu=3,4,\dots n$. On a aussi les deux développements suivants

$$y_{s,r}(z)=C_2\,z^{\gamma_r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1+\gamma_r)_\nu}{(\alpha_1+\gamma_s)_{\nu+1}}\,F\left(\begin{matrix}-\nu & \alpha_2+\gamma_r & \alpha_3+\gamma_r\dots & \alpha_n+\gamma_r\\ \gamma_r-\gamma_1+1 & \gamma_r-\gamma_2+1 & \dots*\dots & \gamma_r-\gamma_n+1\end{matrix}\middle|\,z\right)\tag{26}$$

où $*$ signifie que $\gamma_r-\gamma_s+1$ doit être omis, et

$$y_{s,r}(z)=C_3\,z^{\gamma_r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\gamma_r-\gamma_s+1)_\nu}{\nu!\,(\alpha_1+\gamma_r+\nu)}\,F\left(\begin{matrix}-\nu & \alpha_2+\gamma_r & \alpha_3+\gamma_r\dots & \alpha_n+\gamma_r\\ \gamma_r-\gamma_1+1 & \gamma_r-\gamma_2+1 & \dots*\dots & \gamma_r-\gamma_n+1\end{matrix}\middle|\,z\right)\tag{27}$$

où $*$ indique que l'on omet $\gamma_r-\gamma_r+1$. Ici C_2 et C_3 sont les constantes

$$C_2=\Gamma(\gamma_s-\gamma_r+1)\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\Gamma(\alpha_\nu+\gamma_r)}{\prod\limits_{\nu=1,\,\nu\neq s}^{n}\Gamma(\gamma_r-\gamma_\nu+1)},\qquad C_3=\Gamma(\alpha_1+\gamma_s)\frac{\prod\limits_{\nu=2}^{n}\Gamma(\alpha_\nu+\gamma_r)}{\prod\limits_{\nu=1,\,\nu\neq s}^{n}\Gamma(\gamma_r-\gamma_\nu+1)}.$$

Les séries (26) et (27) convergent si $|z-1|<1$ et $\Re(\alpha_\nu+\gamma_s)>0$, $\nu=2,3,\dots n$. Puisque $y_{s,r}(z)$ est symétrique en γ_r et γ_s et symétrique en $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n$ les séries (25), (26) et (27) ne changent pas de valeur si l'on permute γ_r et γ_s ou les α_ν.

Considérons de même une solution $\bar{y}_{s,r}(z)$ définie par la relation

$$\bar{y}_r^*(z)-\bar{y}_s^*(z)=\frac{\sin\pi(\alpha_s-\alpha_r)}{\pi}\,\bar{y}_{s,r}(z).\tag{28}$$

Également holomorphe au point $z=1$, elle admet le développement

$$\bar{y}_{s,r}(z)=\bar{C}_1\,z^{-\alpha_r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha_r+\gamma_1)_\nu(\alpha_r+\gamma_2)_\nu}{\nu!\,(\alpha_r+\alpha_s+\gamma_1+\gamma_2)_\nu}F\left(\begin{matrix}-\nu & \alpha_r+\gamma_3 & \alpha_r+\gamma_4\dots & \alpha_r+\gamma_n\\ \alpha_r-\alpha_1+1 & \alpha_r-\alpha_2+1 & \dots**\dots & \alpha_r-\alpha_n+1\end{matrix}\middle|\,\frac{1}{z}\right),\tag{29}$$

convergent dans le demi-plan $\Re(z)>\frac{1}{2}$ si $\Re(\alpha_s+\gamma_\nu)>0$, $\nu=3,4,\dots n$; $\bar{C}_1$ est la constante

$$\bar{C}_1=\frac{\Gamma(\alpha^s+\gamma_1)\,\Gamma(\alpha_s+\gamma_2)}{\Gamma(\alpha_r+\alpha_s+\gamma_1+\gamma_2)}\,\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\Gamma(\alpha_r+\gamma_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1,\,\nu\neq s}^{n}\Gamma(\alpha_r-\alpha_\nu+1)}.$$

2. S. Pincherle [55] a attiré l'attention sur l'intégrale

$$\int\limits_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}(-z)^x\frac{\Gamma(x+\alpha_1)\,\Gamma(x+\alpha_2)\dots\Gamma(x+\alpha_n)\,\Gamma(-x)}{\Gamma(x+\gamma_1)\,\Gamma(x+\gamma_2)\dots\Gamma(x+\gamma_{n-1})}\,dx\qquad \begin{matrix}0>\varkappa>-\Re(\alpha_\nu)\\ \nu=1,2,\dots n\end{matrix}$$

qui représente, à un facteur constant près, la fonction définie par la série (1) et son prolongement analytique. Hj. MELLIN [33–40] a considéré une classe plus générale d'intégrales contenant sous le signe un produit de fonctions gamma et de fonctions trigonométriques. L'importance de ces intégrales et d'autres semblables a été mise en évidence par E.W. BARNES [2–3] et plus récemment par C. S. MEIJER [30–32].

Nous allons étudier ci-dessous les $y_s^*(1)$ comme fonction d'un des paramètres γ_s ou α_s et nous considérons certaines intégrales remarquables où ces fonctions figurent sous le signe. Dans le cas particulier $n = 2$ les fonctions en question s'expriment par la fonction gamma grâce à la formule de Gauss

$$F\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ & \gamma\end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha_1-\alpha_2)}{\Gamma(\gamma-\alpha_1)\,\Gamma(\gamma-\alpha_2)}.$$

et les intégrales que nous allons considérer se réduisent aux intégrales de BARNES [3].

Chapitre I.

3. Choisissons γ tel que $\Re(\alpha_i + \beta_n + \gamma) > 0$, $i = 1, 2, \ldots n$ et supposons $\Re(\beta_n) > -1$. L'intégrale

$$\int_1^\infty z^{-\gamma}(z-1)^{\gamma-x-1}\,\bar{\xi}_n(z)\,dz = \int_1^\infty z^{-x-1}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\gamma-x-1}\bar{\xi}_n(z)\,dz \tag{1}$$

est alors convergente dans la bande

$$-\Re(\alpha_i) < \Re(x) < \Re(\beta_n+\gamma), \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{2}$$

Développons $(1-1/z)^{\gamma-x-1}$ par la formule du binôme. On peut intégrer terme à terme parce que l'intégrale

$$\int_1^\infty \left| z^{-x-1}\,\bar{\xi}_n(z)\right| \sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x+1-\gamma)_\nu}{\nu!}\,z^{-\nu}\right| dz$$

converge. Par conséquent, en vertu de (16) § 1, l'intégrale (1) est égale à

$$\Gamma(\beta_n+1)\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(x+\alpha_\nu)}{\Gamma(x-\gamma_\nu+1)}\,F\begin{pmatrix}x-\gamma+1 & x+\alpha_1 & x+\alpha_2 & \ldots & x+\alpha_n \\ & x-\gamma_1+1 & x-\gamma_2+1 & \ldots & x-\gamma_n+1\end{pmatrix} \tag{3}$$

et cette série converge si $\Re(x) < \Re(\beta_n+\gamma)$. Posons $z = \dfrac{1+t}{t}$; on trouve alors

$$\int_0^\infty t^{x-1}(1+t)^{-\gamma}\,\bar{\xi}_n\left(\frac{1+t}{t}\right)dt =$$
$$\Gamma(\beta_n+1)\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(x+\alpha_\nu)}{\Gamma(x-\gamma_\nu+1)}\,F\begin{pmatrix} x-\gamma+1 & x+\alpha_1 & x+\alpha_2 & \ldots & x+\alpha_n \\ x-\gamma_1+1 & x-\gamma_2+1 & \ldots & x-\gamma_n+1 & \end{pmatrix}. \tag{4}$$

La fonction au second membre est holomorphe dans la bande (2) et l'intégrale au premier membre converge dans cette bande. La fonction sous le signe est holomorphe pour toute valeur finie de t différente de 0 et -1. La série (11) § 1 met en évidence son comportement au voisinage du point à l'infini. Il en résulte que l'intégrale au premier membre ne change pas de valeur si l'on fait tourner la ligne d'intégration et si l'on chemine de zéro à $\infty\, e^{i\vartheta}$, où $\pi > \vartheta > -\pi$.

Posons $x = \sigma + i\tau$. D'un théorème connu relatif à l'intégrale de Laplace[1] résulte, dans la bande (2), l'inégalité asymptotique

$$\left|\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(x+\alpha_\nu)}{\Gamma(x-\gamma_\nu+1)}\,F\begin{pmatrix} x-\gamma+1 & x+\alpha_1 & x+\alpha_2 & \ldots & x+\alpha_n \\ x-\gamma_1+1 & x-\gamma_2+1 & \ldots & x-\gamma_n+1 & \end{pmatrix}\right| < C\,e^{-(\pi-\varepsilon)|\tau|} \tag{5}$$

ε étant >0, et, par la formule d'inversion de Mellin, on déduit de (4)

$$\bar{\xi}_n(z) = \tag{6}$$
$$\frac{\Gamma(\beta_n+1)}{2\pi i}\,z^\gamma\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}(z-1)^{x-\gamma}\prod_1^n\frac{\Gamma(x+\alpha_\nu)}{\Gamma(x-\gamma_\nu+1)}\,F\begin{pmatrix} x-\gamma+1 & x+\alpha_1 & x+\alpha_2 & \ldots & x+\alpha_n \\ x-\gamma_1+1 & x-\gamma_2+1 & \ldots & x-\gamma_n+1 & \end{pmatrix}dx,$$

où

$$-\Re(\alpha_i) < \varkappa < \Re(\beta_n+\gamma), \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{7}$$

En vertu de l'inégalité (5) cette intégrale converge pour toute valeur de z qui n'est pas réelle et ≤ 1. Sa valeur est indépendante de $\varkappa$ tant que l'inégalité (7) est satisfaite.

Soit $|z| < 1$ et considérons l'intégrale

$$\int_1^\infty t^{-\gamma}\,\bar{\xi}_n(t)\,\frac{dt}{t-z}, \tag{8}$$

où l'on suppose $\Re(\beta_n) > -1$ et $\Re(\alpha_i+\gamma) > 0$, $i = 1, 2, \ldots n$. Dans ces conditions l'intégrale est convergente. Remplaçons $(t-z)^{-1}$ par $\sum_0^\infty z^\nu t^{-\nu-1}$. Cette série converge uniformément dans l'intervalle d'intégration et l'intégrale $\int_1^\infty t^{-\gamma-1}\,\bar{\xi}_n(t)\,dt$ est absolument convergente. On peut donc intégrer terme à terme[2] et l'on obtient

$$\sum_{\nu=0}^\infty z^\nu\int_1^\infty t^{-\gamma-\nu-1}\,\bar{\xi}_n(t)\,dt = \Gamma(\beta_n+1)\sum_{\nu=0}^\infty z^\nu\prod_{s=1}^n\frac{\Gamma(\alpha_s+\gamma+\nu)}{\Gamma(\gamma-\gamma_s+1+\nu)},$$

[1] Voir Doetsch [8] p. 115.
[2] Voir Bromwich [5].

c'est-à-dire que

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_\nu+\gamma)}{\Gamma(\gamma-\gamma_\nu+1)} F\left(\begin{matrix} 1 & \alpha_1+\gamma & \ldots & \alpha_n+\gamma \\ \gamma-\gamma_1+1 & \ldots & \gamma-\gamma_n+1 \end{matrix}\middle| z\right) = \frac{1}{\Gamma(\beta_n+1)} \int_1^\infty t^{-\gamma} \bar{\xi}_n(t) \frac{dt}{t-z} \tag{9}$$

En y substituant l'expression (6) de $\bar{\xi}_n$ on trouvera

$$\begin{gathered}\prod_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_\nu+\gamma)}{\Gamma(\gamma-\gamma_\nu+1)} F\left(\begin{matrix} 1 & \alpha_1+\gamma & \alpha_2+\gamma & \ldots & \alpha_n+\gamma \\ \gamma-\gamma_1+1 & \gamma-\gamma_2+1 & \ldots & & \gamma-\gamma_n+1 \end{matrix}\middle| z\right) = \\ \frac{1}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{dt}{t-z} \int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} (t-1)^{x-\gamma} \prod_1^n \frac{\Gamma(x+\alpha_\nu)}{\Gamma(x-\gamma_\nu+1)} F\left(\begin{matrix} x-\gamma+1 & x+\alpha_1 & x+\alpha_2 \ldots x+\alpha_n \\ x-\gamma_1+1 & x-\gamma_2+1 & \ldots x-\gamma_n+1 \end{matrix}\right) dx.\end{gathered} \tag{10}$$

Choisissons $\varkappa$ tel que $\Re(\gamma-1)<\varkappa<\Re(\gamma)$, ce qui est toujours possible, et admettons que $0<z<1$. On aura

$$\int_1^\infty \frac{(t-1)^{x-\gamma}}{t-z} dt = \int_0^\infty \frac{t^{x-\gamma}}{t+1-z} dt = (1-z)^{x-\gamma} \int_0^\infty \frac{t^{x-\gamma}}{1+t} dt. \tag{11}$$

Mais l'intégrale d'Euler

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \Re(x)>0, \quad \Re(y)>0$$

où l'on remplace t par $t/(1+t)$ s'écrit

$$\int_0^\infty t^{x-1}(1+t)^{-x-y}\,dt = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \Re(x)>0, \quad \Re(y)>0.$$

En y posant $y=1-x$ il vient

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}\,dt}{1+t} = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 1>\Re(x)>0.$$

Par conséquent l'intégrale (11) est égale à

$$\frac{(1-z)^{x-\gamma}\,\pi}{\sin \pi(\gamma-x)} \quad \text{si} \quad -1<\Re(x-\gamma)<0.$$

Cela posé, on voit sans peine qu'on peut au second membre de (10) intervertir l'ordre des intégrations[1] et l'on trouve ainsi

[1] Voir BROMWICH [5] p. 503 et DOETSCH [8] p. 399.

$$
\begin{gathered}
\prod_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_\nu+\gamma)}{\Gamma(\gamma-\gamma_\nu+1)} F\left(\begin{matrix} 1 & \alpha_1+\gamma & \alpha_2+\gamma & \ldots & \alpha_n+\gamma \\ \gamma-\gamma_1+1 & \gamma-\gamma_2+1 & \ldots & & \gamma-\gamma_n+1 \end{matrix} \middle| z\right) = \\
\frac{1}{2i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} \frac{(1-z)^{x-\gamma}}{\sin\pi(\gamma-x)} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(x+\alpha_\nu)}{\Gamma(x-\gamma_\nu+1)} F\left(\begin{matrix} x-\gamma+1 & x+\alpha_1 & x+\alpha_2 \ldots & x+\alpha_n \\ x-\gamma_1+1 & x-\gamma_2+1 & \ldots & x-\gamma_n+1 \end{matrix}\right) dx,
\end{gathered} \tag{12}
$$

où les points γ et $\beta_n+\gamma$ sont situés à droite tandis que $\gamma-1$ et $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots -\alpha_n$ sont à gauche du contour. Pour abréger l'écriture nous avons supposé $0<z<1$, mais l'inégalité (5) entraîne que l'intégrale au second membre de (12) converge pour toute valeur de z différente de 1 dans l'angle $2\pi > arg(1-z) > -2\pi$ et elle converge uniformément dans tout domaine fermé à l'intérieur de ce domaine. Elle représente par conséquent le prolongement analytique de la série hypergéométrique au premier membre dans tout ce domaine. On a donc deux expressions différentes en deux points de la surface de Riemann situés l'un au-dessus de l'autre, et en prenant la différence entre elles on retombe sur la relation (6).

Soit s un des nombres $1, 2, \ldots n$. Posons pour abréger[1]

$$
g_s(x) = \frac{\sin\pi(\beta_n+\gamma_s-x)}{\pi} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(x+\alpha_\nu)}{\Gamma(x-\gamma_\nu+1)} F\left(\begin{matrix} x+\alpha_1 & x+\alpha_2 \ldots & x+\alpha_n \\ x-\gamma_1+1 & x-\gamma_2+1 \ldots * \ldots & x-\gamma_n+1 \end{matrix}\right) \tag{13}
$$

où l'astérisque indique que $x-\gamma_s+1$ doit être omis. Cette série hypergéométrique converge si $\Re(x) < \Re(\beta_n+\gamma_s)$. En faisant $\gamma=\gamma_s$ dans l'équation (12) elle s'écrit

$$
y_s^*(z) = \frac{z^{\gamma_s}}{2i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} \frac{(1-z)^{x-\gamma_s}}{\sin\pi(\gamma_s-x)} \frac{\pi g_s(x)\,dx}{\sin\pi(\beta_n+\gamma_s-x)}, \tag{14}
$$

où les points γ_s et $\beta_n+\gamma_s$ sont à droite tandis que les $-\alpha_i$ sont à gauche du contour. Ici on suppose donc que $\Re(\alpha_i+\beta_n+\gamma_s)>0$, $\Re(\alpha_i+\gamma_s)>0$, $i=1, 2, \ldots n$. D'après ce que nous venons de dire la fonction $g_s(x)$ se représente dans la bande

$$
-\Re(\alpha_i) < \Re(x) < \Re(\beta_n+\gamma_s), \quad i=1, 2, \ldots n \tag{15}
$$

par l'intégrale

$$
g_s(x) = \frac{\sin\pi(\beta_n+\gamma_s-x)}{\pi\Gamma(\beta_n+1)}\int_1^\infty z^{-\gamma_s}(z-1)^{\gamma_s-x-1}\,\bar{\xi}_n(z)\,dz; \tag{16}
$$

si l'on remplace le chemin rectiligne par un lacet, issu de l'infini et y revenant après avoir entouré le point 1 on obtient encore

$$
g_s(x) = \frac{1}{2\pi i\Gamma(\beta_n+1)}\int_\infty^{(1-)} z^{-\gamma_s}(1-z)^{\gamma_s-x-1}\,\xi_n(z)\,dz \tag{17}
$$

et cette dernière intégrale converge dans le demi-plan $\Re(x+\alpha_i)>0$, $i=1, 2, \ldots n$.

[1] E. W. Barnes [2] a fait usage d'une fonction semblable dans ses recherches sur les fonctions hypergéométriques dites confluentes et ayant seulement deux points singuliers.

La relation (14) nous donne une représentation d'une fonction hypergéométrique quelconque par une expression qui est très commode pour l'étude du prolongement analytique de cette fonction au voisinage du point singulier $z = 1$.

Substituons la série

$$\bar{\xi}_n(z) = z^{-\alpha_i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_{\nu, n}^{(i)}}{(\beta_n + 1)_\nu} \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\beta_n + \nu} \tag{18}$$

dans l'intégrale (16). On peut intégrer terme à terme parce que l'intégrale

$$\int_1^\infty \left| z^{-\alpha_i - \gamma_s} (z-1)^{\gamma_s - x - 1} \right| \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\bar{c}_{\nu, n}^{(i)}}{(\beta_n + 1)_\nu} \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\beta_n + \nu} \right| dz$$

converge, comme il résulte aisément de la valeur asymptotique de $\bar{c}_{\nu, n}^{(i)}$. On trouve ainsi

$$g_s(x) = \frac{\Gamma(x + \alpha_i)}{\Gamma(x + 1 - \beta_n - \gamma_s)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_{\nu, n}^{(i)} (\beta_n + \gamma_s - x)_\nu}{\Gamma(\beta_n + 1 + \nu)\, \Gamma(\alpha_i + \beta_n + \gamma_s + \nu)}, \tag{19}$$

où i prend les valeurs $1, 2, \ldots n$. Cette série converge dans le demi-plan $\Re(x + \alpha_\nu) > 0$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, $\nu \neq i$. Les séries (13) et (19) convergent donc toutes les deux dans la bande (15) et par conséquent l'une représente le prolongement analytique de l'autre. Il en résulte que $g_s(x)$ est une fonction méromorphe de x admettant comme pôles les points $-\alpha_i - \nu$, $i = 1, 2, \ldots n$, et holomorphe pour toute autre valeur finie de x. De plus on voit que cette fonction s'annule aux points $\beta_n + \gamma_s - 1 - \nu$ et $\gamma_s - 1 - \nu$, ν étant un entier positif ou nul.[1] En posant $x = \beta_n + \gamma_s + \nu$ dans l'équation (19), la série se réduit à un nombre fini de termes et l'on obtient

$$g_s(\beta_n + \gamma_s + \nu) = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \frac{\bar{c}_{r, n}^{(i)} (\alpha_i + \beta_n + \gamma_s + r)_{\nu - r}}{(\nu - r)!\, \Gamma(\beta_n + 1 + r)}$$

d'où il s'ensuit

$$g_s(\beta_n + \gamma_s + \nu) = \frac{c_{\nu, n}^{(s)}}{\Gamma(\beta_n + 1 + \nu)}. \tag{20}$$

4. Nous allons maintenant examiner comment se comporte la fonction $g_s(x)$ pour les grandes valeurs de $|x|$. Nous supposerons que les γ_i sont distinctes et ne diffèrent pas l'une de l'autre par des entiers. Si $\Re(\beta_n) > 0$ les séries hypergéométriques $\bar{y}_s(1)$ et $y_r(1)$ convergent. Dans l'équation (7) § 1 on peut faire tendre z vers 1 des deux côtés de la coupure le long de l'axe des nombres positifs.[2] Il vient alors

$$\bar{y}_s^*(1) = \sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pm \pi i (\alpha_s + \gamma_r)}}{\sin \pi (\alpha_s + \gamma_r)} B_r\, y_r^*(1).$$

[1] Dans ce qui suit nous désignerons souvent une suite de pôles ou zéros d'une manière analogue sans répéter chaque fois que ν prend les valeurs $0, 1, 2, \ldots$

[2] Acta Math., 94 (1955), 313.

En soustrayant ces deux équations on obtient

$$\sum_{r=1}^{n} B_r\, y_r^*(1) = 0. \tag{21}$$

De l'équation (24) § 1 il résulte que

$$y_r^*(1) = y_s^*(1) + \frac{\sin\pi(\gamma_s - \gamma_r)}{\pi}\, y_{s,r}(1),$$

et la substitution de cette expression dans l'équation (21) donne

$$y_s^*(1) \sum_{r=1}^{n} B_r + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{n} B_r \sin\pi(\gamma_s - \gamma_r)\, y_{s,r}(1) = 0. \tag{22}$$

Par décomposition en fractions simples rationnelles on obtient

$$\prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin\pi(x+\alpha_\nu)}{\sin\pi(\gamma_\nu - x)} = -e^{\mp\pi i \beta_n} + \sum_{r=1}^{n} B_r \frac{e^{\pm\pi i(\gamma_r - x)}}{\sin\pi(\gamma_r - x)}.$$

En soustrayant ces deux équations on voit que

$$\sum_{r=1}^{n} B_r = -\sin\pi\beta_n.$$

L'équation (22) peut donc s'écrire

$$\pi \sin\pi\beta_n\, y_s^*(1) = \sum_{r=1,\, r\neq s}^{n} B_r \sin\pi(\gamma_s - \gamma_r)\, y_{s,r}(1). \tag{23}$$

En remplaçant ici γ_s par x il vient

$$g_s(x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{r=1\\ r\neq s}}^{n} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \sin\pi(\alpha_\nu + \gamma_r)}{\prod\limits_{\nu=1,\,\nu\neq s}^{n}{}' \sin\pi(\gamma_\nu - \gamma_r)} \, \frac{f_{s,r}(x)}{\Gamma(x - \gamma_s + 1)}, \tag{24}$$

$f_{s,r}(x)$ étant la fonction qu'on déduit de $y_{s,r}(1)$ en y remplaçant γ_s par x. Or en vertu de (25) § 1 la fonction $f_{s,r}(x)$ se représente par la série

$$f_{s,r}(x) = C \frac{\Gamma(x+\alpha_1)\Gamma(x+\alpha_2)}{\Gamma(x+\alpha_1+\alpha_2+\gamma_r)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1+\gamma_r)_\nu (\alpha_2+\gamma_r)_\nu}{\nu!\,(x+\alpha_1+\alpha_2+\gamma_r)_\nu} F\begin{pmatrix} -\nu & \alpha_3+\gamma_r \ldots & \alpha_n+\gamma_r \\ \gamma_r-\gamma_1+1 \ldots * \ldots & \gamma_r-\gamma_n+1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

C étant la constante

$$C = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \Gamma(\alpha_\nu + \gamma_r)}{\prod\limits_{\nu=1,\,\nu\neq s}^{n} \Gamma(\gamma_r - \gamma_\nu + 1)}. \tag{26}$$

Cette série converge si $\Re(x+\alpha_i)>0$, $i=3, 4, \ldots n$. Par conséquent les séries (13) et (25) convergent toutes les deux dans la bande (15). Le second membre de (24) représente donc le prolongement analytique de la fonction $g_s(x)$ définie par la série (13). Cette nouvelle expression n'est pas aussi simple que (19) mais elle a l'avantage de donner immédiatement l'expression asymptotique de $g_s(x)$. En effet, la série de facultés qui figure au second membre de (25) tend uniformément vers 1 quand x s'éloigne à l'infini en restant dans le demi-plan de convergence. On a donc

$$\frac{f_{s,r}(x)}{\Gamma(x-\gamma_s+1)} = C\,x^{\gamma_s-\gamma_r-1}(1+o(1)), \tag{27}$$

C étant la constante (26). Posons pour abréger

$$C_r^{(s)} = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}{}' \Gamma(\gamma_\nu-\gamma_r)}{\Gamma(\gamma_s-\gamma_r)\prod\limits_{\nu=1}^{n}\Gamma(1-\alpha_\nu-\gamma_r)}. \tag{28}$$

Il résulte de (24) que dans le demi-plan de convergence $\Re(x+\alpha_i)>0$ la fonction $g_s(x)$ est de la forme

$$g_s(x) = \sum_{r=1,\, r\neq s}^{n} C_r^{(s)} x^{\gamma_s-\gamma_r-1}(1+o(1)). \tag{29}$$

Cela posé, reprenons l'équation (21). Elle peut s'écrire

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}{}'\Gamma(\gamma_\nu-\gamma_r)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\Gamma(1-\alpha_\nu-\gamma_r)}\,F\begin{pmatrix}\alpha_1+\gamma_r & \alpha_2+\gamma_r\ldots & \alpha_n+\gamma_r\\ \gamma_r-\gamma_1+1 & \gamma_r-\gamma_2+1\ldots * \ldots & \gamma_r-\gamma_n+1\end{pmatrix}=0.$$

En remplaçant γ_s par x, on obtient

$$g_s(x) = p(x)\sum_{r=1,\, r\neq s}^{n} C_r^{(s)}\frac{\Gamma(x-\gamma_r)}{\Gamma(x-\gamma_s+1)}\,F\begin{pmatrix}\alpha_1+\gamma_r & \alpha_2+\gamma_r\ldots & \alpha_n+\gamma_r\\ \gamma_r-x+1 & \gamma_r-\gamma_1+1\ldots * * \ldots & \gamma_r-\gamma_n+1\end{pmatrix}, \tag{30}$$

où les deux astériques indiquent que $\gamma_r-\gamma_r+1$ et $\gamma_r-\gamma_s+1$ doivent être omis. Ici $p(x)$ est la fonction périodique

$$p(x) = \frac{\sin\pi(x-\beta_n-\gamma_s)\prod\limits_{\nu=1}^{n}\sin\pi(\gamma_\nu-x)}{\sin\pi(\gamma_s-x)\prod\limits_{\nu=1}^{n}\sin\pi(x+\alpha_\nu)}. \tag{31}$$

La fonction $p(x)$ tend vers 1 quand x s'éloigne à l'infini le long du contour de l'intégrale (14), et, si on pose $x = \sigma + i\tau$, on a

$$p(x) = 1 + O(e^{-2\pi|\tau|}), \qquad \pi - \varepsilon > |\arg x| > \varepsilon > 0. \tag{32}$$

Les séries de facultés qui entrent dans le second membre de (30) convergent dans le demi-plan $\Re(x) < \Re(\beta_n + \gamma_s)$. Il en résulte que l'égalité asymptotique (29) reste vraie quand x tend vers l'infini dans l'angle $\pi - \varepsilon > arg\, x > -\pi + \varepsilon$ de manière à éviter les pôles. La fonction $g_s(x)$ se comporte donc comme une puissance finie de x dans cet angle. L'équation (30) peut aussi s'écrire

$$\frac{g_s(x)}{\sin\pi(\gamma_s - x)\sin\pi(\beta_n + \gamma_s - x)} = \sum_{r=1,\, r \neq s}^{n} p_r^{(s)}(x) \frac{\Gamma(\gamma_s - x)}{\Gamma(\gamma_r - x + 1)} F\begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma_r & \alpha_2 + \gamma_r & \dots & \alpha_n + \gamma_r \\ \gamma_r - x + 1 & \gamma_r - \gamma_1 + 1 & \dots & \gamma_r - \gamma_n + 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

$$= \sum_{r=1,\, r \neq s}^{n} p_r^{(s)}(x)(-x)^{\gamma_s - \gamma_r - 1}(1 + o(1)), \tag{34}$$

où

$$p_r^{(s)}(x) = \frac{C_r^{(s)} \prod_{\nu=1}^{n} \sin\pi(\gamma_\nu - x)}{\sin\pi(\gamma_s - x)\sin\pi(\gamma_r - x) \prod_{\nu=1}^{n} \sin\pi(x + \alpha_\nu)}. \tag{35}$$

L'expression (34) met en évidence comment se comporte la fonction $g_s(x)$ quand x tend vers l'infini dans le demi-plan $\Re(x) < \Re(\beta_n + \gamma_s)$ en évitant les pôles.

La fonction $f_{s,r}(x)$ est symétrique en x et γ_r. En permutant x et γ_r dans le second membre de (25) et en substituant la série ainsi obtenue dans l'équation (24) on trouvera une expression de $g_s(x)$ qui converge pour toute valeur non-singulière de x, pourvu que $\Re(\alpha_i + \gamma_r) > 0$, $i = 3, 4, \dots n$. On peut ainsi de différentes manières réaliser le prolongement analytique de la fonction $g_s(x)$.

5. Nous avons vu que l'intégrale (1) est égale à la série (3). En posant $\gamma = 1 - \alpha_{n+1}$ et en remplaçant n par $n-1$ on obtient

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{\sin\pi(\beta_n + \gamma_n - x)}{\pi\Gamma(\beta_{n-1} + 1)} \frac{\Gamma(x + \alpha_n)}{\Gamma(x - \gamma_n + 1)} \int_1^\infty z^{\alpha_n - 1}(z-1)^{-x-\alpha_n} \bar{\xi}_{n-1}(z)\, dz \\ &= \frac{\Gamma(x + \alpha_n)}{2\pi i \Gamma(\beta_{n-1} + 1)\Gamma(x - \gamma_n + 1)} \int_\infty^{(1-)} z^{\alpha_n - 1}(1-z)^{-x-\alpha_n} \xi_{n-1}(z)\, dz \end{aligned} \tag{36}$$

et la dernière intégrale converge si $\Re(x + \alpha_\nu) > 0$, $\nu = 1, 2, \dots n-1$. La fonction $\xi_{n-1}(z)$ dépend des paramètres $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ et $\gamma_1 \dots \gamma_{n-1}$. Nous pouvons le mettre en évidence en écrivant

$$\xi_{n-1}(z) = \xi_{n-1}\left(\begin{matrix}\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\\ \gamma_1\,\gamma_2\ldots\gamma_{n-1}\end{matrix}\middle|\, z\right).$$

Si l'on permute α_n et α_j ainsi que γ_n et γ_s on trouve

$$g_s(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha_j)}{2\pi i\,\Gamma(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s)\,\Gamma(x-\gamma_s+1)}\int_{\infty}^{(1-)} z^{\alpha_j-1}(1-z)^{-x-\alpha_j}\,\xi_{n-1}\left(\begin{matrix}\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}\,\alpha_{j+1}\ldots\alpha_n\\ \gamma_1\ldots\gamma_{s-1}\,\gamma_{s+1}\ldots\gamma_n\end{matrix}\middle|\, z\right)dz. \tag{37}$$

Cette intégrale converge si $\Re(x+\alpha_\nu)>0$, $\nu=1, 2, \ldots n$, $\nu \neq j$. En y substituant la série (17) et en intégrant terme à terme on obtient

$$g_s(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha_i)\,\Gamma(x+\alpha_j)}{\Gamma(x+1-\beta_n-\gamma_s)\,\Gamma(x+1-\gamma_s)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\bar{c}^{(i)}_{\nu,\,n-1}\,(\beta_n+\gamma_s-x)_\nu}{\Gamma(\alpha_i+\beta_n+\gamma_s+\nu)\,\Gamma(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s+\nu)} \tag{38}$$

où on peut donner à i les valeurs $1, 2, \ldots n-1$ et à j les valeurs $1, 2, \ldots n$ avec exclusion de $j=i$. Les coefficients $\bar{c}^{(i)}_{\nu,\,n-1}$ sont formés avec les paramètres $\alpha_1\ldots\alpha_n$ et $\gamma_1\ldots\gamma_n$ en excluant α_j et γ_s de sorte qu'il faudrait écrire plus explicitement

$$\bar{c}^{(i)}_{\nu,\,n-1}\left(\begin{matrix}\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{j-1}\,\alpha_{j+1}\ldots\alpha_n\\ \gamma_1\,\gamma_2\ldots\gamma_{s-1}\,\gamma_{s+1}\ldots\gamma_n\end{matrix}\right).$$

La série (38) converge si $\Re(x+\alpha_\nu)>0$, $\nu=1, 2, \ldots n$, $\nu\neq i, j$. Si $n=2$ il en résulte

$$g_1(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha_1)\,\Gamma(x+\alpha_2)}{\Gamma(x+\alpha_1+\alpha_2+\gamma_2)\,\Gamma(x-\gamma_1+1)\,\Gamma(1-\alpha_1-\gamma_2)\,\Gamma(1-\alpha_2-\gamma_2)},$$

$$g_2(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha_1)\,\Gamma(x+\alpha_2)}{\Gamma(x+\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1)\,\Gamma(x-\gamma_2+1)\,\Gamma(1-\alpha_1-\gamma_1)\,\Gamma(1-\alpha_2-\gamma_1)}$$

parce que $\bar{c}^{(1)}_{\nu,\,1}=0$ si $\nu>0$ et $\bar{c}^{(1)}_{0,\,1}=1$. Ces deux expressions se déduisent aussi plus directement de l'équation (13) en vertu de la formule de Gauss.

Si $n=3$ on déduit de l'équation (38)

$$g_3(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha_2)\,\Gamma(x+\alpha_3)\,F\left(\begin{matrix}1-\alpha_1-\gamma_1 & 1-\alpha_1-\gamma_2 & \beta_3+\gamma_3-x\\ \alpha_2+\beta_3+\gamma_3 & & \alpha_3+\beta_3+\gamma_3\end{matrix}\right)}{\Gamma(x+1-\beta_3-\gamma_3)\,\Gamma(x+1-\gamma_3)\,\Gamma(\alpha_2+\beta_3+\gamma_3)\,\Gamma(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3)}, \tag{39}$$

la série hypergéométrique dans le second membre étant convergente dans le demi-plan $\Re(x+\alpha_1)>0$. Dans cette expression on peut permuter α_1 avec α_2 et α_3. D'autre part l'équation (24) fournit pour cette même fonction l'expression

$$g_3(x)\frac{\Gamma(x+1-\beta_3-\gamma_3)\,\Gamma(x+1-\gamma_3)}{\prod\limits_{\nu=1}^{3}\Gamma(x+\alpha_\nu)} =$$

$$\frac{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2)}{\Gamma(x+1-\gamma_1)\prod\limits_{1}^{3}\Gamma(1-\alpha_\nu-\gamma_2)}F\begin{pmatrix}1-\alpha_1-\gamma_1 & 1-\alpha_2-\gamma_1 & 1-\alpha_3-\gamma_1\\ x-\gamma_1+1 & \gamma_2-\gamma_1+1 & \end{pmatrix}$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma_2-\gamma_1)}{\Gamma(x+1-\gamma_2)\prod\limits_{1}^{3}\Gamma(1-\alpha_\nu-\gamma_1)}F\begin{pmatrix}1-\alpha_1-\gamma_2 & 1-\alpha_2-\gamma_2 & 1-\alpha_3-\gamma_2\\ x-\gamma_2+1 & \gamma_1-\gamma_2+1 & \end{pmatrix},$$

où les deux séries de facultés qui figurent dans le second membre convergent dans le demi-plan $\Re(x) > \Re(\beta_3+\gamma_3-1)$ qui a une bande de largeur 1 en commun avec le demi-plan de convergence $\Re(x) < \Re(\beta_3+\gamma_3)$ de la série (13).

6. Soit α'_ν la partie réelle de α_ν. Posons $\alpha_\nu = \alpha'_\nu + i\,\alpha''_\nu$ et $\gamma_\nu = \gamma'_\nu + i\,\gamma''_\nu$. Soit Θ un nombre positif et <1 tel que $\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left|\sin\pi(\alpha'_\nu-\Theta)\right| > \eta > 0$. Considérons le rectangle ayant pour sommets $\varkappa - im$, $\varkappa + im$, $-m-\Theta+im$ et $-m-\Theta-im$, où m est un entier positif assez grand pour que tous les pôles $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots -\alpha_n$ soient à l'intérieur du rectangle. L'intégrale

$$\int\frac{(1-z)^x g_s(x)\,dx}{\sin\pi(\gamma_s-x)\sin\pi(\beta_n+\gamma_s-x)},$$

prise le long du périmètre de ce rectangle, parcouru dans le sens positif, est égale au produit de $2\pi i$ par la somme des résidus relatifs aux pôles situés à l'intérieur du rectangle. Supposons que $|1-z|>1$ et $|\arg(1-z)|<\pi$. Posons $I_1 = \int\limits_{\varkappa-im}^{\varkappa+im}$ et désignons par I_2, I_3 et I_4 les intégrales prises le long des trois autres côtés du rectangle. Nous allons voir que les trois dernières intégrales tendent vers zéro quand m augmente indéfiniment. En effet, dans les intégrales I_2, I_3 et I_4 on aura pour l'expression qui figure dans l'équation (33)

$$\left|\frac{\Gamma(\gamma_s-x)}{\Gamma(\gamma_r-x+1)}F\begin{pmatrix}\alpha_1+\gamma_r & \alpha_2+\gamma_r & \ldots & \alpha_n+\gamma_r\\ \gamma_r-x+1 & \gamma_r-\gamma_1+1 & ** & \gamma_r-\gamma_n+1\end{pmatrix}\right| < Bm^\gamma,$$

B et γ étant des constantes positives indépendantes de m. Dans l'intégrale I_3

$$x = -m-\Theta+it, \qquad -m<t<m.$$

On aura donc

$$|(1-z)^x| = |1-z|^{-m-\Theta}e^{-t\arg(1-z)} < |1-z|^{-m}e^{\pi|t|},$$

$$|2\sin\pi(\gamma_\nu-x)| < e^{\pi(t-\gamma''_\nu)} + e^{-\pi(t-\gamma''_\nu)},$$

$$|2\sin\pi(x+\alpha_\nu)| > \left(e^{\pi(t+\alpha''_\nu)} + e^{-\pi(t+\alpha''_\nu)}\right)|\sin\pi(\alpha'_\nu-\Theta)|.$$

Il en résulte que

$$\left|\frac{\sin\pi(\gamma_\nu - x)}{\sin\pi(x+\alpha_\nu)}\right| < \frac{e^{\pi|\alpha''_\nu+\gamma''_\nu|}}{|\sin\pi(\alpha'_\nu-\Theta)|}$$

et par conséquent

$$\left|\prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin\pi(\gamma_\nu - x)}{\sin\pi(x+\alpha_\nu)}\right| < \frac{1}{\eta}\, e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\pi|\alpha''_\nu+\gamma''_\nu|}.$$

En tenant compte de ces inégalités et de l'équation (33) on voit qu'on sait trouver une constante C indépendante de m telle que

$$|I_3| < \frac{BC\ m^{\gamma+1}}{\eta\ |1-z|^m}.$$

Puisque $|1-z|>1$ il en résulte que I_3 tend vers zéro quand m augmente indéfiniment. Dans l'intégrale I_4

$$x = \sigma - im \quad \text{où} \quad \varkappa > \sigma > -m-\Theta.$$

On aura donc

$$|(1-z)^x| = |1-z|^\sigma e^{m\arg(1-z)} < |1-z|^\sigma e^{\pi m}$$

et, m étant très grand,

$$|\sin\pi(x+\alpha_\nu)| > \frac{1}{4} e^{\pi(m-\alpha''_\nu)}$$

$$|\sin\pi(\gamma_\nu - x)| < e^{\pi(m+\gamma''_\nu)}.$$

Il en résulte que

$$\left|\frac{\sin\pi(\gamma_\nu - x)}{\sin\pi(x+\alpha_\nu)}\right| < 4\, e^{\pi(\alpha''_\nu+\gamma''_\nu)}.$$

La fonction $p_r^{(s)}(x)$, définie par l'équation (35), satisfait donc à l'inégalité

$$|p_r^{(s)}(x)| < Ce^{-2\pi m},$$

C étant une constante indépendante de m, et, par suite,

$$\left|\frac{(1-z)^x g_s(x)}{\sin\pi(\gamma_s - x)\sin\pi(\beta_n+\gamma_s-x)}\right| < n\,BC\,|1-z|^\sigma m^\gamma e^{-\pi m};$$

ainsi

$$|I_4| < 2\,n\,BCm^{\gamma+1}e^{-\pi m}.$$

Par conséquent I_4 tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. D'une manière tout à fait semblable on voit qu'il en est de même pour l'intégrale I_2. Il en résulte que, dans les conditions imposées à la variable z, c'est-à-dire $|1-z|>1$ et $|\arg(1-z)|<\pi$, l'intégrale au second membre de l'équation (14) est égale à la somme des résidus relatifs aux pôles situés à gauche du contour, multipliée par $2\pi i$. Si les α_ν sont distinctes, et si aucune de leurs différences n'est un nombre entier, les pôles seront tous du premier ordre et il est facile de calculer les résidus. En effet, posons $s=1$, pour abréger l'écriture, et supprimons le facteur z^{γ_1}. L'intégrale en question peut s'écrire

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}(1-z)^{x-\gamma_1}\frac{\Gamma(\gamma_1-x)\prod_{r=1}^{n}\Gamma(x+\alpha_r)}{\prod_{r=2}^{n}\Gamma(x-\gamma_r+1)}F\begin{pmatrix}x+\alpha_1 & x+\alpha_1 & \dots & x+\alpha_n\\ x-\gamma_2+1 & \dots & x-\gamma_n+1\end{pmatrix}dx.$$

En formant la somme des résidus relatifs aux pôles $-\alpha_1-\nu$, multipliée par $2\pi i$, on obtient

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\Gamma(\alpha_1+\gamma_1+\nu)\prod_{r=2}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_r-\alpha_1-\nu)}{\Gamma(1-\alpha_1-\gamma_r-\nu)}F\begin{pmatrix}-\nu & \alpha_2-\alpha_1-\nu & \dots & \alpha_n-\alpha_1-\nu\\ 1-\alpha_1-\gamma_2-\nu & \dots & 1-\alpha_1-\gamma_n-\nu\end{pmatrix}(1-z)^{\alpha_1-\gamma_1-\nu}.$$

En rangeant les termes dans la série hypergéométrique dans l'ordre inverse cette expression se réduit à

$$\Gamma(\alpha_1+\gamma_1)\prod_{r=2}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_r-\alpha_1)}{\Gamma(1-\alpha_1-\gamma_r)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1+\gamma_1)_\nu}{\nu!}F\begin{pmatrix}-\nu & \alpha_1+\gamma_2 & \dots & \alpha_1+\gamma_n\\ \alpha_1-\alpha_2+1 & \dots & \alpha_1-\alpha_n+1\end{pmatrix}(1-z)^{-\alpha_1-\gamma_1-\nu}. \quad (40)$$

Ici $|\arg(1-z)|<\pi$ et la série converge parce que nous avons supposé $|1-z|>1$. Mais puisque

$$F\left(\begin{matrix}\gamma_1\ \gamma_2 & \dots & \gamma_n\\ \alpha_1\ \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1}\end{matrix}\middle|\frac{1}{z}\right)=\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\gamma_1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\gamma_1)_\nu}{\nu!}F\begin{pmatrix}-\nu & \gamma_2\ \gamma_3 & \dots & \gamma_n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1}\end{pmatrix}(1-z)^{-\nu} \quad (41)$$

on voit que, si $|z|>1$, la série (40) est égale à

$$(-z)^{\alpha_1+\gamma_1}\Gamma(\alpha_1+\gamma_1)\prod_{r=2}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_r-\alpha_1)}{\Gamma(1-\alpha_1-\gamma_r)}F\left(\begin{matrix}\alpha_1+\gamma_1\ \alpha_1+\gamma_2 & \dots & \alpha_1+\gamma_n\\ \alpha_1-\alpha_2+1 & \dots & \alpha_1-\alpha_n+1\end{matrix}\middle|\frac{1}{z}\right) \quad (42)$$

où $|\arg(-z)|<\pi$. En formant la somme des résidus relatifs à tous les pôles situés à gauche du contour on obtient une somme de n séries qui se déduisent de (42) en permutant α_1, avec $\alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ et cette somme est en vertu de la relation (6) § 1 égale à $z^{-\gamma_1}y_1^*(z)$. En permutant γ_1 avec γ_s on voit que l'intégrale corresponante est égale à $z^{-\gamma_s}y_s^*(z)$. Nous avons ainsi démontré l'équation (14) d'une nouvelle manière mais cette démonstration est moins générale que celle du paragraphe 3 parce que nous avons supposé ici que les α_ν sont distinctes et ne diffèrent pas par des entiers. Si cette condition n'est pas satisfaite le calcul des résidus devient plus laborieux.

7. On peut d'une manière semblable considérer les résidus relatifs aux pôles à droite du contour. Choisissons $\varkappa$ tel que $\gamma_s - \varkappa$ soit positif et < 1. Posons $\beta_n = \beta_n' + i\beta_n''$. Soit Θ un nombre positif et < 1 tel que $\left|\sin \pi (\Theta - \beta_n')\right| > \eta > 0$. Soit m un entier positif $> \left|\beta_n''\right|$. Considérons le rectangle ayant pour sommets $\varkappa - im$, $\varkappa + im$, $\gamma_s + m + \Theta + im$ et $\gamma_s + m + \Theta - im$. L'intégrale

$$\int \frac{(1-z)^{x-\gamma_s} g_s(x)\, dx}{\sin \pi (\gamma_s - x) \sin \pi (\beta_n + \gamma_s - x)}$$

prise le long du périmètre de ce rectangle, parcouru dans le sens négatif, est égale à la somme des résidus relatifs aux pôles situés à l'intérieur du rectangle, multipliée par $-2\pi i$. Supposons que $0 < \varepsilon < \left|1 - z\right| < 1$ et $\left|\arg(1-z)\right| < \pi$. Posons $I_1 = \int\limits_{\varkappa - im}^{\varkappa + im}$ et désignons les intégrales prises sur les trois autres côtés du rectangle par I_2, I_3 et I_4. Nous allons voir que les trois dernières intégrales tendent vers zéro avec $\frac{1}{m}$. En effet, il résulte de l'équation (29) qu'on aura $\left|g_s(x)\right| < Bm^{\gamma}$ dans les intégrales I_2, I_3 et I_4, B et γ étant des constantes positives indépendantes de m. Dans l'intégrale I_3

$$x = \gamma_s + m + \Theta + it, \quad \text{où} \quad -m < t < m.$$

Il en résulte

$$\left|(1-z)^{x-\gamma_s}\right| = \left|1-z\right|^{m+\Theta} e^{-t \arg(1-z)} < \left|1-z\right|^{m+\Theta} e^{\pi |t|},$$

$$\left|2 \sin \pi (\gamma_s - x)\right| > e^{\pi |t|} \sin \pi\Theta,$$

$$\left|\sin \pi (\beta_n + \gamma_s - x)\right| > \left|\sin \pi (\Theta - \beta_n')\right| > \eta.$$

On aura donc

$$\left|\frac{(1-z)^{x-\gamma_s}}{\sin \pi (\gamma_s - x) \sin \pi (\beta_n + \gamma_s - x)}\right| < \frac{2\left|1-z\right|^{m+\Theta}}{\eta \sin \pi\Theta}$$

et par conséquent

$$\left|I_3\right| < \frac{4B}{\eta \sin \pi\Theta} m^{\gamma+1} \left|1-z\right|^{m+\Theta}.$$

Puisque $\left|1-z\right| < 1$ I_3 tend bien vers zéro quand m augmente indéfiniment. Dans l'intégrale I_4

$$x = \gamma_s + \sigma - im, \quad \text{ou} \quad \varkappa - \gamma_s < \sigma < m + \Theta.$$

On aura donc

$$\left|(1-z)^{x-\gamma_s}\right| = \left|1-z\right|^{\sigma} e^{m \arg(1-z)} < \left|1-z\right|^{\sigma} e^{\pi m},$$

et, m étant très grand,

$$|2\sin\pi(x-\gamma_s)| > \frac{1}{2}e^{\pi m}$$

$$|2\sin\pi(x-\gamma_s-\beta_n)| > \frac{1}{2}e^{\pi(m+\beta''_n)}$$

d'où résulte

$$\left|\frac{(1-z)^{x-\gamma_s}g_s(x)}{\sin\pi(\gamma_s-x)\sin\pi(\beta_n+\gamma_s-x)}\right| < 16\,Bm^{\gamma}\,|1-z|^{\sigma}e^{-\pi(m+\beta''_n)}$$

et, par suite,

$$|I_4| < 16\,Bm^{\gamma}e^{-\pi(m+\beta''_n)}\int_{\varkappa-\gamma_s}^{m+\Theta}|1-z|^{\sigma}d\sigma$$

$$< 16\,Bm^{\gamma}\left(m+1+\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\pi(m+\beta''_n)}.$$

I_4 tend donc vers zéro avec $\frac{1}{m}$. D'une manière semblable on voit qu'il en est de même pour I_2. Il en résulte que $\lim\limits_{m\to\infty} I_1$ est égale à la somme des résidus relatifs aux pôles situés à droite du contour, multipliée par $-2\pi i$.

Ajoutons une remarque importante. Dans ce qui précède, et notamment dans la démonstration de la relation (14), nous avons supposé que les paramètres satisfont à certaines inégalités et, pour abréger l'écriture, nous avons considéré le contour comme une droite parallèle à l'axe imaginaire et passant par le point $\varkappa$. Mais nous pouvons faire varier les paramètres en déformant en même temps le contour de manière à éviter les pôles. Par prolongement analytique on voit que la relation (14) reste vraie si le contour est choisi tel que les suites de pôles croissantes $\gamma_s+\nu$ et $\beta_n+\gamma_s+\nu$ soient à droite et les suites de pôles décroissantes $-\alpha_i-\nu$ soient à gauche du contour. Il suffit donc de supposer que $\alpha_i+\gamma_s$ et $\alpha_i+\beta_n+\gamma_s$, $i=1,2,\ldots n$ ne sont pas des entiers négatifs ou nul. En particulier on peut supprimer l'hypothèse $\Re(\beta_n) > -1$.

Si l'on pose $z=0$ et $\gamma=\gamma_s$ dans la relation (12) il vient

$$\frac{1}{2i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\frac{\pi g_s(x)\,dx}{\sin\pi(\gamma_s-x)\sin\pi(\beta_n+\gamma_s-x)} = \prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_\nu+\gamma_s)}{\Gamma(\gamma_s-\gamma_\nu+1)} \tag{43}$$

avec la même convention pour le contour. Cette intégrale peut donc toujours s'évaluer en termes de la fonction gamma. En prenant $s=n$ l'équation (43) peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\Gamma(\gamma_n-x)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\Gamma(x+\alpha_\nu+r)}{r!\prod\limits_{\nu=1}^{n-1}\Gamma(x-\gamma_\nu+1+r)}dx = \prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_\nu+\gamma_n)}{\Gamma(\gamma_n-\gamma_\nu+1)}.$$

En particulier, si $n = 2$ elle se réduit à la relation suivante

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \Gamma(x+\alpha_1)\,\Gamma(x+\alpha_2)\,\Gamma(\gamma_2 - x)\,\Gamma(1-\alpha_1-\alpha_2-\gamma_1-x)\,dx$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha_1+\gamma_2)\,\Gamma(\alpha_2+\gamma_2)\,\Gamma(1-\alpha_1-\gamma_1)\,\Gamma(1-\alpha_2-\gamma_1)}{\Gamma(\gamma_2-\gamma_1+1)}$$

qui est due à E. W. BARNES [3].

8. Nous allons maintenant voir comment la fonction, définie pour $|z| < 1$ par la série hypergéométrique $y_s^*(z)$, se comporte au voisinage du point singulier $z = 1$. En effet, si $|1-z| < 1$ et $|\arg(1-z)| < \pi$ nous venons de démontrer que l'intégrale au second membre de (14) est égale à la somme des résidus relatifs aux pôles à droite du contour, multipliée par $-2\pi i$. Si β_n n'est pas un entier ou nul, il y a deux suites de pôles simples $\beta_n + \gamma_s + \nu$ et $\gamma_s + \nu$. Les résidus relatifs à la première suite nous donnent la série

$$\frac{-\pi z^{\gamma_s}}{\sin \pi\beta_n}\sum_{\nu=0}^{\infty} g_s(\beta_n+\gamma_s+\nu)\,(1-z)^{\beta_n+\nu}$$

qui, en vertu de (20), est égale à

$$\Gamma(-\beta_n)\,z^{\gamma_s}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_{\nu,n}^{(s)}}{(\beta_n+1)_\nu}(1-z)^{\beta_n+\nu} = \Gamma(-\beta_n)\,\xi_n(z).$$

Les résidus relatifs aux pôles $\gamma_s + \nu$ nous donnent la série suivante que nous désignerons par $\varphi_s(z)$

$$\varphi_s(z) = \frac{\pi z^{\gamma_s}}{\sin \pi\beta_n}\sum_{\nu=0}^{\infty} g_s(\gamma_s+\nu)\,(1-z)^{\nu}. \tag{44}$$

On aura donc

$$y_s^*(z) = \Gamma(-\beta_n)\,\xi_n(z) + \varphi_s(z). \tag{45}$$

Puisque $y_s^*(z)$ et $\xi_n(z)$ sont des solutions de l'équation différentielle (2) § 1, la fonction $\varphi_s(z)$ est une solution holomorphe au voisinage de $z = 1$. En posant $\gamma = \gamma_s$ dans l'équation (6) on voit que la solution non-holomorphe en $z = 1$ se représente, quand $|\arg(z-1)| < \pi$ par l'intégrale

$$\bar{\xi}_n(z) = \Gamma(\beta_n+1)\frac{z^{\gamma_s}}{2i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty}\frac{(z-1)^{x-\gamma_s}\,g_s(x)\,dx}{\sin \pi(\beta_n+\gamma_s-x)}, \quad s = 1, 2, \ldots n \tag{46}$$

où les pôles $\beta_n + \gamma_s + \nu$ sont à droite, les autres pôles à gauche du contour. Cette relation est l'inverse de (16). En substituant les intégrales (46) et (14) dans l'équation (45) ou trouve pour la solution holomorphe au point $z = 1$

$$\varphi_s(z) = \frac{\pi z^{\gamma_s}}{2\,i \sin \pi\beta_n} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \frac{(z-1)^{x-\gamma_s} g_s(x)\,dx}{\sin \pi(\gamma_s - x)} \tag{47}$$

où les pôles $\gamma_s + \nu$ sont à droite, les autres pôles à gauche du contour et $|\arg(z-1)| < \pi$. Cette intégrale représente la fonction $\varphi_s(z)$ pour toute valeur de z qui n'est pas réelle et ≤ 1. De l'équation (17) il s'ensuit que

$$g_s(\gamma_s + \nu) = \frac{1}{2\,\pi i\,\Gamma(\beta_n + 1)} \int_{\infty}^{(1-)} t^{-\gamma_s}(1-t)^{-\nu-1}\,\xi_n(t)\,dt.$$

En substituant cette expression dans la série (44) on obtient

$$\varphi_s(z) = \Gamma(-\beta_n)\frac{z^{\gamma_s}}{2\,\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} t^{-\gamma_s} \frac{\xi_n(t)}{t-z}\,dt, \quad 0 < \varkappa < 1. \tag{48}$$

Cette intégrale converge si $\Re(\alpha_i + \gamma_s) > 0$, $i = 1, 2, \ldots n$. Elle représente $\varphi_s(z)$ ou $y_s^*(z)$ suivant que z est à droite ou à gauche du contour. En particulier, pourvu que $\Re(\beta_n) > -1$, on aura donc

$$y_s^*(z) = \frac{z^{\gamma_s}}{\Gamma(\beta_n + 1)} \int_1^{\infty} t^{-\gamma_s} \frac{\bar{\xi}_n(t)}{t-z}\,dt$$

z n'étant pas positif et ≥ 1. Si dans la série (44), convergente pour $|z-1| < 1$, on remplace g_s par l'expression (19) on obtient

$$\varphi_s(z) = \frac{\Gamma(\alpha_i + \gamma_s)}{\Gamma(\alpha_i + \beta_n + \gamma_s)} z^{\gamma_s} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha_i + \gamma_s)_\nu\, a_\nu^{(i)}\,(z-1)^\nu, \qquad i = 1, 2, \ldots n,$$

où

$$a_\nu^{(i)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_{r,\,n}^{(i)}}{(\alpha_i + \beta_n + \gamma_s)_r} \frac{1}{(\beta_n + r)(\beta_n + r - 1)\ldots(\beta_n + r - \nu)}.$$

On suppose ici que $\Re(\alpha_\nu + \gamma_s) > 0$, $\nu = 1, 2, \ldots n$.

Si β_n est un entier positif ou nul les points $\beta_n + \gamma_s + \nu$ sont des pôles doubles tandis que γ_s, $\gamma_s + 1, \ldots \gamma_s + \beta_n - 1$ sont des pôles simples pour la fonction sous le signe dans (14). En calculant les résidus on obtient dans ce cas

$$\begin{aligned} y_s^*(z) = &-(-1)^{\beta_n} z^{\gamma_s} \sum_{\nu=0}^{\beta_n - 1} g_s'(\gamma_s + \nu)(1-z)^\nu \\ &-(-1)^{\beta_n} z^{\gamma_s} \sum_{\nu=\beta_n}^{\infty} [g_s'(\gamma_s + \nu) + g_s(\gamma_s + \nu)\log(1-z)](1-z)^\nu. \end{aligned} \tag{49}$$

D'après ce que nous venons de démontrer cette série converge dans le cercle $|z-1|<1$, et puisque $|\arg(1-z)|<\pi$, le logarithme a sa valeur principale. En tenant compte de (20) on voit que le terme logarithmique est indépendant de s et (49) peut s'écrire

$$y_s^*(z) = -\frac{(-1)^{\beta_n}}{\Gamma(\beta_n+1)}\,\xi_n(z)\log(1-z) + \varphi_s(z), \tag{50}$$

où

$$\varphi_s(z) = -(-1)^{\beta_n} z^{\gamma_s} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_s'(\gamma_s+\nu)(1-z)^{\nu}. \tag{51}$$

En donnant à s les valeurs $1, 2, \ldots n$ on obtient n solutions logarithmiques qui sont linéairement indépendantes si les γ_s sont distinctes et ne diffèrent pas par des entiers. La différence entre deux quelconques de ces solutions est une solution holomorphe au point $z=1$. De l'équation (17) il s'ensuit que

$$g_s'(\gamma_s+\nu) = \frac{-1}{2\pi i\,\Gamma(\beta_n+1)}\int_{\infty}^{(1-)} t^{-\gamma_s}(1-t)^{-\nu-1}\,\xi_n(t)\log(1-t)\,dt.$$

En substituant cette expression dans la série (51) on trouvera

$$\varphi_s(z) = \frac{(-1)^{\beta_n+1} z^{\gamma_s}}{\Gamma(\beta_n+1)\,2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} t^{-\gamma_s}\frac{\xi_n(t)}{t-z}\log(1-t)\,dt, \quad 0<\varkappa<1. \tag{52}$$

Cette intégrale converge si $\Re(\alpha_i+\gamma_s)>0$, $i=1, 2, \ldots n$. Elle représente $\varphi_s(z)$ ou $y_s^*(z)$ suivant que z est à droite ou à gauche du contour. Si $\beta_n>0$ on déduit de (13) une expression particulièrement simple des β_n premiers coefficients de la série (51) et elle peut s'écrire

$$\varphi_s(z) = z^{\gamma_s}\sum_{\nu=0}^{\beta_n-1}(z-1)^{\nu}\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_i+\gamma_s+\nu)}{\Gamma(\gamma_s-\gamma_i+\nu+1)}\,F\begin{pmatrix}\alpha_1+\gamma_s+\nu & \ldots & \alpha_n+\gamma_s+\nu\\ \gamma_s-\gamma_1+\nu+1 & * & \gamma_s-\gamma_n+\nu+1\end{pmatrix} + \psi_s(z)$$

où

$$\psi_s(z) = -(-1)^{\beta_n} z^{\gamma_s}\sum_{\nu=\beta_n}^{\infty} g_s'(\gamma_s+\nu)(1-z)^{\nu} \tag{53}$$

$$= \frac{1}{\beta_n!\,2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^{\gamma_s}\left(\frac{1-z}{t-1}\right)^{\beta_n}\frac{\xi_n(t)}{z-t}\log(1-t)\,dt, \quad 0<\varkappa<1. \tag{54}$$

La dernière intégrale converge si $\Re(\alpha_i+\gamma_s)>-\beta_n$, $i=1, 2, \ldots n$, et il est supposé que z est à droite du contour. Pour les coefficients de la série (53) (19) fournit l'expression

$$g_s'(\beta_n+\gamma_s+\nu)=\frac{c_{\nu,n}^{(s)}}{(\beta_n+\nu)!}\left[\Psi(\alpha_i+\beta_n+\gamma_s+\nu)-\Psi(\nu+1)\right]$$
$$+\sum_{r=1}^{\nu}\frac{(-1)^r}{(\nu-r)!}\frac{\bar{c}_{r,n}^{(i)}}{(\beta_n+r)!}(\alpha_i+\beta_n+\gamma_s+r)_{\nu-r}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu-1}+\ldots+\frac{1}{\nu-r+1}\right)$$
$$+(-1)^{\nu-1}\sum_{r=\nu+1}^{\infty}\frac{\bar{c}_{r,n}^{(i)}}{(\beta_n+r)!}\frac{(r-\nu-1)!}{(\alpha_i+\beta_n+\gamma_s+\nu)_{r-\nu}},$$

$\Psi(x)$ étant la derivée logarithmique de $\Gamma(x)$. Dans le cas particulier $n=2$ cette expression se réduit à

$$g_1'(\beta_2+\gamma_1+\nu)=\frac{c_{\nu,2}^{(1)}}{(\beta_2+\nu)!}\left[\Psi(\alpha_1+\beta_2+\gamma_1+\nu)+\Psi(\alpha_2+\beta_2+\gamma_1+\nu)-\Psi(\beta_2+\nu+1)-\Psi(\nu+1)\right].$$

Si β_n est un entier négatif, soit $\beta_n=-p$, la fonction $g_s(x)$ a des zéros simples aux points $\gamma_s-1,\ \gamma_s-2,\ldots\gamma_s-p$ et des zéros doubles aux points γ_s-p-1, $\gamma_s-p-2,\ldots$. La fonction sous le signe dans l'intégrale (14) admet à droite du contour les points $\gamma_s-1,\ \gamma_s-2,\ldots\gamma_s-p$ comme pôles simples et les points $\gamma_s,\ \gamma_s+1,\ \gamma_s+2,\ldots$ comme pôles doubles. En déterminant les résidus relatifs à ces points on obtient

$$y_s^*(z)=(-1)^{p+1}z^{\gamma_s}\sum_{\nu=-p}^{\infty}g_s'(\gamma_s+\nu)(1-z)^\nu+(-1)^{p+1}z^{\gamma_s}\sum_{\nu=0}^{\infty}g_s(\gamma_s+\nu)(1-z)^\nu\log(1-z). \quad (55)$$

Admettons que $\Re(\alpha_\nu+\gamma_s)>p,\ \nu=1,\,2,\,\ldots\,n$. La fonction $g_s(x)$ se représente, dans la bande $-\Re(\alpha_\nu)<\Re(x)<\Re(\gamma_s)$, par l'intégrale[1])

$$g_s(x)=\frac{\sin\pi(\gamma_s-x)}{\pi}\int_1^\infty z^{-\gamma_s}(z-1)^{\gamma_s-x-1}\eta_n(z)\,dz. \quad (56)$$

En résolvant cette équation par rapport à $\eta_n(z)$ il vient

$$\eta_n(z)=\frac{z^{\gamma_s}}{2i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}(z-1)^{x-\gamma_s}\frac{g_s(x)\,dx}{\sin\pi(\gamma_s-x)}, \quad (57)$$

où les pôles $\gamma_s+\nu$ sont à droite du contour et $|\arg(z-1)|<\pi$. En substituant la série

$$\eta_n(z)=(-1)^p\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\bar{c}_{r+p,n}^{(i)}}{r!}\left(\frac{z-1}{z}\right)^r$$

dans l'intégrale (56) et en intégrant terme à terme on trouve

$$g_s(x)=\frac{(-1)^p\,\Gamma(x+\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i+\gamma_s)\,\Gamma(x+1-\gamma_s)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\bar{c}_{r+p,n}^{(i)}}{r!}\frac{(\gamma_s-x)_r}{(\alpha_i+\gamma_s)_r}. \quad (58)$$

[1] Voir Acta math. 94 (1955), 330.

Cette série converge dans le demi-plan $\Re(x+\alpha_\nu)>0$, $\nu=1, 2, \ldots n$. En posant $x=\gamma_s+\nu$ elle se réduit à un nombre fini de termes et il s'ensuit

$$g_s(\gamma_s+\nu)=(-1)^p(\alpha_i+\gamma_s)_\nu\sum_{r=0}^{\nu}\frac{(-1)^r\,\bar{c}_{r+p,\,n}^{(i)}}{r!\,(\nu-r)!\,(\alpha_i+\gamma_s)_r},$$

d'où résulte

$$g_s(\gamma_s+\nu)=\frac{c_{\nu+p,\,n}^{(s)}}{\nu!},\qquad \nu\geq 0.$$

L'équation (55) peut donc s'écrire

$$y_s^*(z)=(-1)^{p+1}\eta_n(z)\log(1-z)+\varphi_s(z) \tag{59}$$

où

$$\varphi_s(z)=(-1)^{p+1}z^{\gamma_s}\sum_{\nu=-p}^{\infty}g_s'(\gamma_s+\nu)(1-z)^\nu. \tag{60}$$

De l'équation (56) il résulte que

$$g_s'(x)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\infty}^{(1-)}t^{-\gamma_s}(1-t)^{\gamma_s-x-1}\eta_n(t)\log(1-t)\,dt$$

et cette intégrale converge si $\Re(x+\alpha_\nu)>0$, $\nu=1, 2, \ldots n$. En portant cette expression dans l'équation (60) on obtient

$$\varphi_s(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^{\gamma_s}\left(\frac{t-1}{1-z}\right)^p\frac{\eta_n(t)}{z-t}\log(1-t)\,dt,\qquad 0<\varkappa<1,$$

z étant à droite du contour. Si z franchit le contour cette intégrale représente $y_s^*(z)$ en vertu de (59). On aura donc pour toute valeur de z qui n'est pas positive et >1

$$y_s^*(z)=z^{\gamma_s}(1-z)^{-p}\int_1^{\infty}t^{-\gamma_s}(t-1)^p\,\eta_n(t)\frac{dt}{t-z}. \tag{61}$$

Cette intégrale converge parce que nous avons supposé $\Re(\alpha_\nu+\gamma_s)>p$, $\nu=1, 2, \ldots n$. En vertu de (21) et (23) § 1 la fonction $\eta_n(z)$ satisfait à la relation

$$\int_1^{\infty}z^{x-1}\eta_n(z)\,dz=(-1)^p\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_\nu-x)}{\Gamma(1-\gamma_\nu-x)}+\sum_{r=0}^{p-1}c_{p-1-r,\,n}^{(s)}(x+\gamma_s-r)_r.$$

En posant $x=\nu-\gamma_s$ le premier terme au second membre s'annule et il vient

$$\int_1^{\infty}z^{\nu-1-\gamma_s}\eta_n(z)\,dz=\sum_{r=0}^{\nu-1}c_{p-1-r,\,n}^{(s)}(\nu-r)_r,\qquad \nu=1, 2, \ldots p$$

d'où il s'ensuit

$$\int_1^\infty z^{-\gamma_s}(z-1)^{\nu-1}\eta_n(z)\,dz = (\nu-1)!\,c_{p-\nu,\,n}^{(s)} \qquad \nu = 1, 2, \ldots p.$$

On aura donc en vertu de (56)

$$g_s'(\gamma_s-\nu) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,c_{p-\nu,\,n}^{(s)} \qquad \nu = 1, 2, \ldots p. \tag{62}$$

En portant cette expression dans l'équation (60) on voit que la fonction $\varphi_s(z)$ peut s'écrire

$$\varphi_s(z) = \Gamma(p)\,z^{\gamma_s}(1-z)^{-p}\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{c_{\nu,\,n}^{(s)}}{(1-p)_\nu}(1-z)^\nu + \psi_s(z) \tag{63}$$

où

$$\psi_s(z) = (-1)^{p+1}z^{\gamma_s}\sum_{\nu=0}^{\infty} g_s'(\gamma_s+\nu)(1-z)^\nu \tag{64}$$

$$= \frac{(-1)^p}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^{\gamma_s}\frac{\eta_n(t)}{z-t}\log(1-t)\,dt, \qquad 0<\varkappa<1 \tag{65}$$

z étant à droite du contour. Il en résulte en particulier que l'équation (59) peut s'écrire

$$y_s^*(z) = \Gamma(p)\,z^{\gamma_s}(1-z)^{-p}\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{c_{\nu,\,n}^{(s)}}{(1-p)_\nu}(1-z)^\nu + (-1)^p z^{\gamma_s}\int_1^\infty t^{-\gamma_s}\frac{\eta_n(t)}{t-z}\,dt. \tag{66}$$

Les deux dernières intégrales convergent si $\Re(\alpha_\nu+\gamma_s)>0$, $\nu = 1, 2, \ldots n$. Par prolongement analytique on voit que les relations en question sont vraies quand cette condition est satisfaite. Le second membre de (66) représente le prolongement analytique de $y_s^*(z)$ pour toute valeur de z qui n'est pas positive et ≥ 1.

Pour les coefficients de la série (64) on déduira de (58) l'expression suivante

$$\begin{aligned} g_s'(\gamma_s+\nu) = {} & \frac{c_{\nu+p,\,n}^{(s)}}{\nu!}\left[\Psi(\alpha_i+\gamma_s+\nu)-\Psi(\nu+1)\right] \\ & + (-1)^p\sum_{r=1}^{\nu}\frac{(-1)^r}{(\nu-r)!}\,\frac{\bar{c}_{r+p,\,n}^{(i)}}{r!}(\alpha_i+\gamma_s+r)_{\nu-r}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu-1}+\cdots+\frac{1}{\nu-r+1}\right) \\ & + (-1)^{p+\nu-1}\sum_{r=\nu+1}^{\infty}\frac{\bar{c}_{r+p,\,n}^{(i)}}{r!}\,\frac{(r-\nu-1)!}{(\alpha_i+\gamma_s+\nu)_{r-\nu}}. \end{aligned}$$

Si $n = 2$ cette expression se réduit à

$$g_1'(\gamma_1+\nu) = \frac{c_{\nu+p,\,2}^{(1)}}{\nu!}\left[\Psi(\alpha_1+\gamma_1+\nu)+\Psi(\alpha_2+\gamma_1+\nu)-\Psi(\nu+1)-\Psi(\nu+p+1)\right], \qquad \nu\geq 0.$$

Chapitre II.

9. Dans ce qui suit nous supposerons que les α_i sont distinctes et ne diffèrent pas par des entiers et qu'il en est de même des γ_i. Nous allons considérer une fonction $G_{s,j}(x)$, définie par la série hypergéométrique

$$G_{s,j}(x) = \frac{\prod_{\nu=1}^{n} \Gamma(\alpha_\nu + \gamma_s)}{\Gamma(\alpha_j + \gamma_s) \prod_{\nu=1}^{n} \Gamma(\gamma_s - \gamma_\nu + 1)} F\begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma_s & \alpha_2 + \gamma_s & \dots & \alpha_n + \gamma_s & x + \gamma_s \\ \gamma_s - \gamma_1 + 1 & \gamma_s - \gamma_2 + 1 & * & \gamma_s - \gamma_n + 1 & \alpha_j + \gamma_s \end{pmatrix} \tag{1}$$

convergente pour $\Re(x) < \Re(\alpha_j + \beta_n)$, où $*$ indique que $\gamma_s - \gamma_s + 1$ doit être omis. $\Gamma(x + \gamma_s)\, G_{s,j}(x)$ est donc la fonction qu'on obtient en remplaçant α_j par x dans $y_s^*(1)$. Admettons que les nombres $\alpha_\nu + \gamma_s$, $\nu = 1, 2, \dots n$ ne soient pas des entiers négatifs ou nuls et que

$$\Re(\alpha_j + \beta_n + \gamma_s) > 0, \quad s = 1, 2, \dots n. \tag{2}$$

Voyons comment se comporte cette fonction pour les valeurs très grandes de $|x|$. Si $\Re(\beta_n) > 0$ on peut faire tendre z vers 1 dans l'équation (6) § 1. On obtient ainsi

$$y_s^*(1) = \sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pm \pi i (\alpha_r + \gamma_s)}}{\sin \pi (\alpha_r + \gamma_s)} \bar{B}_r \bar{y}_r^*(1). \tag{3}$$

En multipliant les deux côtés par $e^{\mp \pi i (\alpha_j + \gamma_s)}$ on trouve

$$e^{\mp \pi i (\alpha_j + \gamma_s)}\ y_s^*(1) = \sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pm \pi i (\alpha_r - \alpha_j)}}{\sin \pi (\alpha_r + \gamma_s)} \bar{B}_r \bar{y}_r^*(1). \tag{4}$$

En soustrayant ces deux équations il vient

$$\sin \pi (\alpha_j + \gamma_s)\, y_s^*(1) = \sum_{r=1,\, r \neq j}^{n} \frac{\sin \pi (\alpha_j - \alpha_r)}{\sin \pi (\alpha_r + \gamma_s)} \bar{B}_r \bar{y}_r^*(1). \tag{5}$$

Cette relation peut aussi s'écrire

$$\sin \pi (\alpha_j + \gamma_s)\, y_s^*(1) = \pi \sum_{r=1,\, r \neq j}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_r + \gamma_s)}{\Gamma(\alpha_r + 1 - \alpha_j)} \frac{\prod_{\nu=1}^{n}{}' \Gamma(\alpha_\nu - \alpha_r)}{\prod_{\nu=1,\, \nu \neq s}^{n} \Gamma(1 - \alpha_r - \gamma_\nu)} \frac{\bar{y}_r(1)}{\Gamma(\alpha_j - \alpha_r)}. \tag{6}$$

En remplaçant α_j par x il en résulte

$$G_{s,j}(x) = \sum_{r=1,\, r \neq j}^{n} C_r \frac{\Gamma(1 - \gamma_s - x)}{\Gamma(1 + \alpha_r - x)} F\begin{pmatrix} \alpha_r + \gamma_1 & \alpha_r + \gamma_2 & \dots & \alpha_r + \gamma_n \\ \alpha_r - x + 1 & \alpha_r - \alpha_1 + 1 & ** & \alpha_r - \alpha_n + 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

où l'on a posé pour abréger

$$C_r = \frac{\Gamma(\alpha_r+\gamma_s)}{\Gamma(\alpha_j-\alpha_r)} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}{}' \Gamma(\alpha_\nu-\alpha_r)}{\prod\limits_{\nu=1,\,\nu\neq s}^{n} \Gamma(1-\alpha_r-\gamma_\nu)}. \tag{8}$$

Les deux astériques signifient que $\alpha_r - \alpha_r + 1$ et $\alpha_r - \alpha_j + 1$ doivent être omis. Les séries de facultés hypergéométriques qui figurent au second membre de (7) convergent si $\Re(x) < \Re(\alpha_j + \beta_n)$ et elles tendent uniformément vers 1 quand x s'éloigne à l'infini en restant dans le demi-plan de convergence. On a donc dans ce demi-plan l'égalité asymptotique

$$G_{s,j}(x) = \sum_{r=1,\,r\neq j}^{n} \frac{C_r(1+o(1))}{(-x)^{\alpha_r+\gamma_s}}. \tag{9}$$

De l'équation (28) § 1 il résulte que

$$\bar{y}_r^*(1) = \bar{y}_j^*(1) + \frac{\sin\pi(\alpha_j-\alpha_r)}{\pi}\,\bar{y}_{j,r}(1). \tag{10}$$

En substituant cette expression dans l'équation (3) il vient

$$\begin{aligned} y_s^*(1) = {} & \bar{y}_j^*(1) \sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pm\pi i(\alpha_r+\gamma_s)}}{\sin\pi(\alpha_r+\gamma_s)}\bar{B}_r \\ & + \sum_{r=1,\,r\neq j}^{n} \frac{e^{\pm\pi i(\alpha_r+\gamma_s)}}{\pi\sin\pi(\alpha_r+\gamma_s)}\bar{B}_r \sin\pi(\alpha_j-\alpha_r)\,\bar{y}_{j,r}(1). \end{aligned} \tag{11}$$

Par décomposition en fractions simples rationnelles on obtient

$$\prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin\pi(\gamma_\nu-x)}{\sin\pi(x+\alpha_\nu)} = -e^{\mp\pi i\beta_n} + \sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pm\pi i(x+\alpha_r)}}{\sin\pi(x+\alpha_r)}\bar{B}_r. \tag{12}$$

En posant $x = \gamma_s$ il en résulte

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pm\pi i(\alpha_r+\gamma_s)}}{\sin\pi(\alpha_r+\gamma_s)}\bar{B}_r = e^{\mp\pi i\beta_n}. \tag{13}$$

Par conséquent l'équation (11) se réduit à

$$\begin{aligned} y_s^*(1) = {} & \bar{y}_j^*(1)\, e^{\mp\pi i\beta_n} \\ & + \sum_{r=1,\,r\neq j}^{n} \frac{e^{\pm\pi i(\alpha_r+\gamma_s)}}{\pi\sin\pi(\alpha_r+\gamma_s)}\bar{B}_r \sin\pi(\alpha_j-\alpha_r)\,\bar{y}_{j,r}(1). \end{aligned}$$

En éliminant $\bar{y}_j^*(1)$ entre ces deux équations on trouvera

$$y_s^*(1) = \sum_{r=1,\,r\neq j}^{n} \frac{\sin\pi(\alpha_r+\beta_n+\gamma_s)}{\pi\sin\pi(\alpha_r+\gamma_s)\sin\pi\beta_n} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\sin\pi(\alpha_r+\gamma_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1,\,\nu\neq j}^{n}{}'\sin\pi(\alpha_\nu-\alpha_r)}\,\bar{y}_{j,r}(1). \tag{14}$$

En remplaçant α_j par x cette équation peut s'écrire

$$G_{s,j}(x) = \sum_{r=1,\,r\neq j}^{n} \frac{\sin\pi(\alpha_j+\alpha_r+\beta_n+\gamma_s-x)}{\pi\sin\pi(\alpha_r+\gamma_s)\sin\pi(\alpha_j+\beta_n-x)} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\sin\pi(\alpha_r+\gamma_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1,\,\nu\neq j}^{n}{}'\sin\pi(\alpha_\nu-\alpha_r)} \frac{\bar{f}_{j,r}(x)}{\Gamma(x+\gamma_s)} \tag{15}$$

$\bar{f}_{j,r}(x)$ étant la fonction qu'on déduit de $\bar{g}_{j,r}(1)$ en remplaçant α_j par x. Or en vertu de (29) § 1 $\bar{f}_{j,r}(x)$ se représente par la série

$$\bar{f}_{j,r}(x) =$$
$$A_r \frac{\Gamma(x+\gamma_1)\Gamma(x+\gamma_2)}{\Gamma(x+\alpha_r+\gamma_1+\gamma_2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha_r+\gamma_1)_\nu(\alpha_r+\gamma_2)_\nu}{\nu!\,(x+\alpha_r+\gamma_1+\gamma_2)_\nu} F\begin{pmatrix}-\nu & \alpha_r+\gamma_3 \ldots & \alpha_r+\gamma_n \\ \alpha_r-\alpha_1+1 & ** & \alpha_r-\alpha_n+1\end{pmatrix}, \tag{16}$$

A_r étant la constante

$$A_r = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\Gamma(\alpha_r+\gamma_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1,\,\nu\neq j}^{n}\Gamma(\alpha_r-\alpha_\nu+1)}.$$

La série de facultés au second membre de (16) converge si $\Re(x+\gamma_s)>0$, $s=3$, $4, \ldots n$. Quand x tend vers l'infini en restant dans le demi-plan de convergence on a donc

$$\frac{\bar{f}_{j,r}(x)}{\Gamma(x+\gamma_s)} = \frac{A_r(1+o(1))}{x^{\alpha_r+\gamma_s}}. \tag{17}$$

L'équation (15) réalise le prolongement analytique de $G_{s,j}(x)$ en dehors du domaine de convergence de la série (1). Il en résulte que dans le demi-plan de convergence de (16) on a

$$G_{s,j}(x) = \sum_{r=1,\,r\neq j}^{n} \frac{\sin\pi(\alpha_j+\alpha_r+\beta_n+\gamma_s-x)}{\sin\pi(\alpha_j+\beta_n-x)} \frac{C_r(1+o(1))}{x^{\alpha_r+\gamma_s}} \tag{18}$$

C_r étant la constante (8). L'égalité asymptotique (9) est par conséquent vraie dans l'angle $|\arg(-x)|<\pi-\varepsilon$, ε étant positif. Si β_n n'est pas un entier il résulte en particulier qu'on aura pour les valeurs entières positives et très grandes de ν

$$G_{s,j}(\alpha_j+\nu) = \sum_{r=1,\,r\neq j}^{n} \frac{\sin\pi(\alpha_r+\beta_n+\gamma_s)}{\sin\pi\beta_n} \frac{C_r(1+o(1))}{\nu^{\alpha_r+\gamma_s}}. \tag{19}$$

L'équation (15) met en évidence que la fonction $G_{s,j}(x)$ admet comme pôles les points $x=\alpha_j+\beta_n+\nu$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$ et qu'elle est holomorphe pour toute autre valeur finie de x.

10. On voit comme au paragraphe 3 que

$$\prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{\Gamma(\alpha_\nu+\gamma)}{\Gamma(\gamma-\gamma_\nu+1)} F\begin{pmatrix} \alpha_1+\gamma & \alpha_2+\gamma & \dots & \alpha_{n+1}+\gamma & x+\gamma \\ \gamma-\gamma_1+1 & \gamma-\gamma_2+1 & \dots & \gamma-\gamma_{n+1}+1 \end{pmatrix} = \tag{20}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta_{n+1}+1)} \int_1^\infty z^{x-1}(z-1)^{-x-\gamma}\,\bar{\xi}_{n+1}(z)\,dz = \tag{21}$$

$$\Gamma(\alpha_i+\gamma) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_{\nu,\,n+1}^{(i)}\,\Gamma(\beta_{n+1}+1-\gamma-x+\nu)}{\Gamma(\beta_{n+1}+\nu+1)\,\Gamma(\alpha_i+\beta_{n+1}+1-x+\nu)}, \tag{22}$$

où on peut donner à i les valeurs $1, 2, \dots n+1$. En posant $i = n+1$, $\gamma = \gamma_s$, $\alpha_{n+1} = 1-\gamma_s$ et $\gamma_{n+1} = 1-\alpha_j$ il vient

$$G_{s,j}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_{\nu,\,n}^{(j)}}{\Gamma(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s+\nu)} \frac{1}{\alpha_j+\beta_n+\nu-x}, \tag{23}$$

et cette série converge si $\Re(\alpha_\nu+\gamma_s)>0$, $\nu = 1, 2, \dots n$, $\nu \neq j$, x étant différent des pôles. En prenant les autres valeurs possibles de l'indice supérieur on obtient

$$G_{s,j}(x) = \frac{\Gamma(\alpha_i+\gamma_s)\,\Gamma(\alpha_j+\beta_n-x)}{\Gamma(\alpha_i+\alpha_j+\beta_n+\gamma_s-x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_{\nu,\,n-1}^{(i)}(\alpha_j+\beta_n-x)_\nu}{\Gamma(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s+\nu)(\alpha_i+\alpha_j+\beta_n+\gamma_s-x)_\nu}, \tag{24}$$

où on peut donner à i les valeurs $1, 2, \dots j-1, j+1, \dots n$. Dans la dernière série les polynômes $\bar{c}_{\nu,\,n-1}^{(i)}$ sont formés avec les paramètres $\alpha_1 \dots \alpha_n$ et $\gamma_1 \dots \gamma_n$ avec exclusion de α_j et γ_s de sorte qu'il faudrait écrire plus explicitement

$$\bar{c}_{\nu,\,n-1}^{(i)}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_{j-1} & \alpha_{j+1} \dots \alpha_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 \dots \gamma_{s-1} & \gamma_{s+1} \dots \gamma_n \end{pmatrix}.$$

La série (24) converge si $\Re(\alpha_\nu+\gamma_s)>0$, $\nu = 1, 2, \dots n$, $\nu \neq i$ et j. On déduit de même de (21)

$$G_{s,j}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s)} \int_1^\infty z^{x-1}(z-1)^{-x-\gamma_s}\,\bar{\xi}_{n-1}\left(\begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_{j-1} & \alpha_{j+1} \dots \alpha_n \\ \gamma_1 \dots \gamma_{s-1} & \gamma_{s+1} \dots \gamma_n \end{matrix} \middle| \, z\right) dz. \tag{25}$$

Cette intégrale converge si $\Re(x) < \Re(\alpha_j+\beta_n)$ et $\Re(\alpha_\nu+\gamma_s)>0$, $\nu = 1, 2, \dots n$, $\nu \neq j$. En remplaçant le chemin rectiligne par un lacet on trouve

$$G_{s,j}(x) = \frac{\operatorname{cos\acute{e}c}\pi(\alpha_j+\beta_n-x)}{2i\,\Gamma(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s)} \int_\infty^{(1-)} z^{x-1}(1-z)^{-x-\gamma_s}\,\xi_{n-1}\left(\begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_{j-1} & \alpha_{j+1} \dots \alpha_n \\ \gamma_1 \dots \gamma_{s-1} & \gamma_{s+1} \dots \gamma_n \end{matrix} \middle| \, z\right) dz \tag{26}$$

et la dernière intégrale converge quel que soit x si $\Re(\alpha_\nu+\gamma_s)>0$, $\nu = 1, 2, \dots n$, $\nu \neq j$. C'est aux notations près la même relation que (37) § 5.

Sur les expressions analytiques susdites on vérifie que $G_{s,j}(x)$ est une fonction méromorphe de x admettant comme pôles simples les points $\alpha_j+\beta_n+\nu$, comme nous l'avons déjà dit. Les résidus relativement à ces pôles sont mis en évidence par la série de fractions rationnelles (23).

Cela posé, considérons l'intégrale

$$\frac{z^{-\alpha_j}}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{x-\alpha_j}\Gamma(\alpha_j-x)\,\Gamma(x+\gamma_s)\,G_{s,j}(x)\,dx, \tag{27}$$

où le contour est choisi tel que les pôles $\alpha_j+\nu$ et $\alpha_j+\beta_n+\nu$ soient à sa droite et les $-\gamma_s-\nu$ à sa gauche. En vertu de (7) on aura

$$\Gamma(\alpha_j-x)\,\Gamma(x+\gamma_s)\,G_{s,j}(x)=\frac{\pi}{\sin\pi(x+\gamma_s)}\sum_{r=1,\,r\neq j}^{n}C_r\,(-x)^{\alpha_j-\alpha_r-1}(1+o(1))$$

dans le demi-plan $\Re(x)<\Re(\alpha_j+\beta_n)$ et l'équation (15) met en évidence comment cette même fonction se comporte asymptotiquement en dehors de ce demi-plan. Il en résulte que l'intégrale (27) converge pour toute valeur de z différente de 1 dans l'angle $\left|\arg\left(\frac{1}{z}-1\right)\right|<\pi$ et elle converge uniformément dans tout domaine fermé à l'intérieur de ce domaine. On voit comme au paragraphe 6 que, si $\left|\frac{z}{1-z}\right|<1$, elle est égale à la somme des résidus relatifs aux pôles situés à gauche du contour, multipliée par $2\pi i$, c'est à dire égale à

$$\frac{z^{\gamma_s}}{(1-z)^{\alpha_j+\gamma_s}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s+\nu)}{\nu!}\,G_{s,j}(-\gamma_s-\nu)\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\nu}.$$

En y substituant l'expression (1) de $G_{s,j}$, on obtient

$$\frac{z^{\gamma_s}}{(1-z)^{\alpha_j+\gamma_s}}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_\nu+\gamma_s)}{\Gamma(\gamma_s-\gamma_\nu+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha_j+\gamma_s)_\nu}{\nu!}\,F\begin{pmatrix}\alpha_1+\gamma_s\;\dots & \alpha_n+\gamma_s & -\nu\\ \gamma_s-\gamma_1+1 \;*\; & \gamma_s-\gamma_n+1 & \alpha_j+\gamma_s\end{pmatrix}\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\nu}$$

et cette série est égale à $y_s^*(z)$ en vertu de (41) § 6. On aura donc

$$y_s^*(z)=\frac{z^{-\alpha_j}}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{x-\alpha_j}\Gamma(\alpha_j-x)\,\Gamma(x+\gamma_s)\,G_{s,j}(x)\,dx, \tag{28}$$

où on peut donner à j les valeurs 1, 2, ... n. Nous avons supposé la condition (2) satisfaite mais par prolongement analytique on voit qu'il suffit de supposer qu'aucun des nombres $\alpha_1+\gamma_s$, $\alpha_2+\gamma_s$, ... $\alpha_n+\gamma_s$, $\alpha_j+\beta_n+\gamma_s$ n'est un entier négatif ou nul, et que le contour a été choisi de manière à séparer les suites de pôles croissantes et décroissantes de la fonction sous le signe.

11. Admettons maintenant que $\left|\frac{1-z}{z}\right| < 1$ et $\left|\arg \frac{1-z}{z}\right| < \pi$. En tenant compte de ce que nous avons dit sur le comportement asymptotique de $G_{s,j}(x)$ on voit, comme au paragraphe 7, que l'intégrale (27) est égale à la somme des résidus relatifs aux pôles situés à droite du contour, multipliée par $-2\pi i$.

Si β_n n'est pas un entier ou nul ces pôles sont simples et l'on obtient en tenant compte de (23)

$$y_s^*(z) = z^{-\alpha_j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Gamma(-\beta_n - \nu)\, \bar{c}_{\nu,n}^{(j)} \left(\frac{1-z}{z}\right)^{\beta_n+\nu}$$
$$+ z^{-\alpha_j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s+\nu)}{\nu!} G_{s,j}(\alpha_j+\nu) \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu}.$$

La première série au second membre est égale à $\Gamma(-\beta_n)\, \xi_n(z)$. On aura donc

$$y_s^*(z) = \Gamma(-\beta_n)\, \xi_n(z) + \varphi_s(z) \tag{29}$$

et il en résulte que la solution $\varphi_s(z)$, holomorphe au point $z = 1$, peut se développer suivant les puissances de $\frac{z-1}{z}$ de n manières équivalentes sous la forme

$$\varphi_s(z) = \Gamma(\alpha_j+\gamma_s)\, z^{-\alpha_j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j+\gamma_s)_\nu}{\nu!} G_{s,j}(\alpha_j+\nu) \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu}, \quad j = 1, 2, \ldots n. \tag{30}$$

Ces séries convergent dans le demi-plan $\Re(z) > \frac{1}{2}$. En y substituant l'expression (26) on voit que $\varphi_s(z)$ se représente aussi par l'intégrale

$$\varphi_s(z) = \frac{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s)\, z^{\gamma_s}}{\Gamma(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s)\, 2i \sin \pi\beta_n} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \frac{t^{\alpha_j-1}}{(z-t)^{\alpha_j+\gamma_s}}\, \xi_{n-1}\left(\begin{matrix}\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1}\, \alpha_{j+1} \ldots \alpha_n \\ \gamma_1 \ldots \gamma_{s-1}\, \gamma_{s+1} \ldots \gamma_n\end{matrix}\middle| t\right) dt, \tag{31}$$

z étant à droite du contour. Ici $0 < \varkappa < 1$ et l'on peut donner à j les valeurs $1, 2, \ldots n$. En utilisant l'expression (23) de $G_{s,j}$, on voit que la série (30) peut s'écrire

$$\varphi_s(z) = \frac{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s)\, z^{-\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j+\gamma_s)_\nu}{\nu!} a_\nu^{(j)} \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu}, \tag{32}$$

où

$$a_\nu^{(j)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_{r,n}^{(j)}}{(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s)_r}\, \frac{1}{r+\beta_n-\nu},$$

pourvu que $\Re(\alpha_i+\gamma_s) > 0$, $i = 1, 2, \ldots n$, $i \neq j$. Admettons que cette dernière condition soit satisfaite et soit en outre

$$\Re(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s) > 0. \tag{33}$$

En raisonnant comme au paragraphe 3 on démontre que

$$y_s^*(z) = \frac{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s)\, z^{\gamma_s}}{\Gamma(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s)} \int_1^{\infty} \frac{t^{\alpha_j-1}}{(t-z)^{\alpha_j+\gamma_s}}\, \xi_{n-1}\left(\begin{matrix}\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1} & \alpha_{j+1} \ldots \alpha_n \\ \gamma_1 \ldots \gamma_{s-1} & \gamma_{s+1} \ldots \gamma_n\end{matrix}\middle|\, t\right) dt \tag{34}$$

et cette intégrale représente le prolongement analytique de $y_s^*(z)$ pour toute valeur de z qui n'est pas positive et > 1. Si l'on remplace le chemin rectiligne par un lacet la condition (33) devient superflue et il vient, z étant en dehors du lacet

$$y_s^*(z) = \Gamma(\alpha_j+\gamma_s)\,\Gamma(1-\alpha_j-\beta_n-\gamma_s)\,\frac{z^{\gamma_s}}{2\pi i} \int_{\infty}^{(1-)} \frac{t^{\alpha_j-1}}{(t-z)^{\alpha_j+\gamma_s}}\, \xi_{n-1}\left(\begin{matrix}\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1} & \alpha_{j+1} \ldots \alpha_n \\ \gamma_1 \ldots \gamma_{s-1} & \gamma_{s+1} \ldots \gamma_n\end{matrix}\middle|\, t\right) dt \tag{35}$$

pourvu que $\alpha_j+\beta_n+\gamma_s$ ne soit pas un entier ou nul.

De l'équation (47) § 8 on tire par inversion

$$\frac{\pi}{\sin \pi\beta_n}\, g_s(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{(1-)} z^{-\gamma_s}(1-z)^{\gamma_s-x-1}\, \varphi_s(z)\, dz, \tag{36}$$

l'intégrale étant convergente si $\Re(x+\alpha_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots n$. En y substituant l'expression (30) et en intégrant terme à terme on trouvera

$$\begin{aligned}
\frac{\pi\, g_s(x)}{\sin \pi\beta_n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{(1-)} z^{-\alpha_j-\gamma_s}(1-z)^{\gamma_s-x-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s+\nu)}{\nu!}\, G_{s,j}(\alpha_j+\nu) \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s+\nu)}{\nu!}\, G_{s,j}(\alpha_j+\nu) \int_{\infty}^{(1-)} z^{-\alpha_j-\gamma_s-\nu}(1-z)^{\gamma_s-x+\nu-1}\, dz \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s+\nu)}{\nu!}\, G_{s,j}(\alpha_j+\nu)\, \frac{\Gamma(x+\alpha_j)}{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s+\nu)\,\Gamma(x-\gamma_s-\nu+1)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$g_s(x) = \frac{\sin \pi\beta_n\, \Gamma(x+\alpha_j)}{\pi\,\Gamma(x-\gamma_s+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\gamma_s-x)_{\nu}}{\nu!}\, G_{s,j}(\alpha_j+\nu), \quad j = 1, 2, \ldots n. \tag{37}$$

En tenant compte de (19) on voit que cette série converge si $\Re(x+\alpha_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots n$, $i \neq j$.

Si β_n est un entier positif ou nul les points $\alpha_j+\beta_n+\nu$ sont des pôles doubles tandis que α_j, α_j+1, $\ldots$ $\alpha_j+\beta_n-1$ sont des pôles simples pour la fonction sous le signe dans (27). Le résidu relatif au pôle simple $\alpha_j+\nu$ $(\nu < \beta_n)$, multiplié par $-2\pi i$, est

$$z^{-\alpha_j}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu} \frac{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s+\nu)}{\nu!}\, G_{s,j}(\alpha_j+\nu).$$

Cette expression se représente, en vertu de (1), par la série convergente

$$z^{-\alpha_j}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu}\frac{(\alpha_j+\gamma_s)_\nu}{\nu!}\prod_{r=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_r+\gamma_s)}{\Gamma(\gamma_s-\gamma_r+1)}F\begin{pmatrix}\alpha_1+\gamma_s & \alpha_2+\gamma_s\ldots\alpha_n+\gamma_s & \alpha_j+\gamma_s+\nu\\ \gamma_s-\gamma_1+1 & \ldots * \ldots\ \gamma_s-\gamma_n+1 & \alpha_j+\gamma_s\end{pmatrix}.$$

Le résidu relatif au pôle double $\alpha_j+\beta_n+\nu$, multiplié par $-2\pi i$, est, en vertu de (23), égal à

$$\frac{z^{-\alpha_j}}{(\beta_n+\nu)!}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\beta_n+\nu}\Bigg[(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s)_\nu\sum_{\substack{r=0\\ r\neq\nu}}^{\infty}\frac{\bar{c}_{r,n}^{(j)}}{(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s)_r}\frac{1}{r-\nu}$$
$$+\bar{c}_{\nu,n}^{(j)}\left(\Psi(\beta_n+\nu+1)-\Psi(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s+\nu)-\log\frac{1-z}{z}\right)\Bigg].$$

En formant la somme des résidus on déduit de l'équation (28)

$$\begin{aligned}y_s^{*}(z)=z^{-\alpha_j}\prod_{r=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_r+\gamma_s)}{\Gamma(\gamma_s-\gamma_r+1)}\sum_{\nu=0}^{\beta_n-1}\frac{(\alpha_j+\gamma_s)_\nu}{\nu!}F\begin{pmatrix}\alpha_1+\gamma_s & \ldots & \alpha_n+\gamma_s & \alpha_j+\gamma_s+\nu\\ \gamma_s-\gamma_1+1 & * & \gamma_s-\gamma_n+1 & \alpha_j+\gamma_s\end{pmatrix}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu}\\ -\frac{(-1)^{\beta_n}}{\beta_n!}\xi_n(z)\log\frac{1-z}{z}+\varphi_s(z),\quad j=1,2,\ldots n\end{aligned}\tag{38}$$

où $\left|\arg\frac{1-z}{z}\right|<\pi$, et où $\varphi_s(z)$ est une fonction holomorphe au point $z=1$, admettant les développements

$$\varphi_s(z)=z^{-\alpha_i}\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu^{(j)}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\beta_n+\nu},\qquad j=1,2,\ldots n,\tag{39}$$

convergents dans le demi-plan $\Re(z)>\frac{1}{2}$. Les coefficients $b_\nu^{(j)}$ sont, d'après ce que nous venons de dire, de la forme suivante

$$\begin{aligned}b_\nu^{(j)}=\frac{(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s)_\nu}{(\beta_n+\nu)!}\sum_{r=0,\,r\neq\nu}^{\infty}\frac{\bar{c}_{r,n}^{(j)}}{(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s)_r}\frac{1}{r-\nu}\\ +\frac{\bar{c}_{\nu,n}^{(j)}}{(\beta_n+\nu)!}\left[\Psi(\beta_n+\nu+1)-\Psi(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s+\nu)\right].\end{aligned}\tag{40}$$

Si $\beta_n=0$ le premier terme au second membre de (38) s'annule.

Si β_n est un entier négatif la fonction sous le signe dans (27) admet les points α_j, α_j+1, $\alpha_j+2,\ldots$ comme pôles doubles et les points α_j-1, $\alpha_j-2,\ldots\alpha_j+\beta_n$ comme pôles simples. En tenant compte de (23) on peut aisément calculer les résidus relativement à ces points et l'on voit que $y_s^{*}(z)$ est ici de la forme

$$y_s^{*}(z)=(-1)^{\beta_n-1}\eta_n(z)\log\frac{1-z}{z}+\varphi_s(z)\tag{41}$$

où $\varphi_s(z)$ se représente dans le demi-plan $\Re(z) > \frac{1}{2}$ par des développements de la forme (39) avec

$$b_\nu^{(j)} = (-1)^{\beta_n+\nu}\,\Gamma(-\beta_n-\nu)\,\bar{c}_{\nu,n}^{(j)}, \quad \text{si} \quad \beta_n+\nu<0,$$

tandis que $b_\nu^{(j)}$ est de la forme (40) si $\beta_n+\nu>0$. La fonction $\varphi_s(z)$ admet par conséquent le point $z=1$ comme pôle d'ordre $-\beta_n$, et la partie principale est une fonction rationnelle des paramètres, multipliée par $z^{-\alpha_j}$.

En résumé, si β_n est un entier positif, négatif ou nul l'équation différentielle (2) § 1 admet n solutions linéairement indépendantes ayant une singularité logarithmique au point $z=1$. La partie non-logarithmique d'une de ces solutions se représente d'une part par une série, procédant suivant les puissances de $z-1$, et convergente à l'intérieur du cercle $|z-1|=1$, d'autre part par n séries équivalentes, procédant suivant les puissances de $\frac{z-1}{z}$, et convergentes dans le demi-plan $\Re(z) > \frac{1}{2}$.

Chapitre III.

12. Les séries hypergéométriques $\bar{g}_s(z)$ procédant suivant les puissances décroissantes de z donnent lieu à des remarques semblables à celles que nous venons de faire. Considérons une fonction $\bar{g}_s(x)$ définie dans le demi-plan $\Re(x) < \Re(\alpha_s+\beta_n)$ par la série hypergéométrique

$$\bar{g}_s(x) = \frac{\sin\pi(\alpha_s+\beta_n-x)}{\pi}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(x+\gamma_\nu)}{\Gamma(x-\alpha_\nu+1)}\,F\begin{pmatrix} x+\gamma_1 & x+\gamma_2 & \ldots\ldots & x+\gamma_n \\ x-\alpha_1+1 & x-\alpha_2+1 & \ldots * \ldots & x-\alpha_n+1\end{pmatrix} \qquad (1)$$

où l'astérisque indique que $x-\alpha_s+1$ doit être omis. C'est une fonction méromorphe de x admettant comme pôles les points $-\gamma_i-\nu$, $i=1, 2, \ldots n$ et holomorphe pour toute autre valeur de x. De plus cette fonction s'annule aux points α_s-1, α_s-2, $\alpha_s-3, \ldots$ et $\alpha_s+\beta_n-1$, $\alpha_s+\beta_n-2, \ldots$ Elle se représente aussi par l'intégrale

$$\bar{g}_s(x) = \frac{1}{2\pi i\,\Gamma(\beta_n+1)}\int_0^{(1+)} z^{x-1}(z-1)^{\alpha_s-x-1}\,\bar{\xi}_n(z)\,dz \qquad (2)$$

qui converge si $\Re(x+\gamma_i)>0$, $i=1, 2, \ldots n$. En y substituant la série (10) § 1 et en intégrant terme à terme on obtient le développement

$$\bar{g}_s(x) = \frac{\Gamma(x+\gamma_i)}{\Gamma(x-\alpha_s-\beta_n+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_{\nu,n}^{(i)}\,(\alpha_s+\beta_n-x)_\nu}{\Gamma(\beta_n+\nu+1)\,\Gamma(\alpha_s+\beta_n+\gamma_i+\nu)}. \qquad (3)$$

Il en résulte en particulier que

$$\bar{g}_s(\alpha_s+\beta_n+\nu)=\frac{\bar{c}_{\nu,n}^{(s)}}{\Gamma(\beta_n+\nu+1)},\quad \nu=0,1,2,\ldots \tag{4}$$

Admettons que $\alpha_s+\gamma_i$ et $\alpha_s+\beta_n+\gamma_i$, $i=1,2,\ldots n$ ne soient pas des entiers négatifs ou nuls. On aura

$$\bar{g}_s^*(z)=\frac{z^{-\alpha_s}}{2i}\int\limits_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{x-\alpha_s}\frac{\pi\bar{g}_s(x)\,dx}{\sin\pi(\alpha_s-x)\sin\pi(\alpha_s+\beta_n-x)}, \tag{5}$$

où le contour a été choisi de manière à séparer les suites de pôles croissantes et décroissantes de la fonction sous le signe. L'intégrale converge si $\left|\arg\frac{z-1}{z}\right|<2\pi$. La fonction $\xi_n(z)$ se représente par l'intégrale

$$\xi_n(z)=\Gamma(\beta_n+1)\frac{z^{-\alpha_s}}{2i}\int\limits_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{x-\alpha_s}\frac{\bar{g}_s(x)\,dx}{\sin\pi(\alpha_s+\beta_n-x)}, \tag{6}$$

avec la même convention pour le contour, et cette intégrale converge si $\left|\arg\frac{1-z}{z}\right|<\pi$. Admettons que $\left|\frac{z-1}{z}\right|<1$ et $\left|\arg\frac{z-1}{z}\right|<\pi$. L'intégrale au second membre de (5) est alors égale à la somme des résidus relatifs aux pôles situés à droite du contour, multipliée par $-2\pi i$. Si β_n n'est pas un entier ou nul il en résulte que

$$\bar{g}_s^*(z)=\Gamma(-\beta_n)\bar{\xi}_n(z)+\bar{\varphi}_s(z), \tag{7}$$

$\bar{\varphi}_s(z)$ étant une solution holomorphe au point $z=1$, admettant le développement

$$\bar{\varphi}_s(z)=\frac{\pi z^{-\alpha_s}}{\sin\pi\beta_n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{g}_s(\alpha_s+\nu)\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu} \tag{8}$$

qui converge dans le demi-plan $\Re(z)>\frac{1}{2}$. En tenant compte de (2) on en déduit

$$\bar{\varphi}_s(z)=\frac{\Gamma(-\beta_n)}{2\pi i}\int\limits_0^{(1+)}\left(\frac{t}{z}\right)^{\alpha_s-1}\frac{\bar{\xi}_n(t)}{z-t}\,dt. \tag{9}$$

Cette intégrale converge si $\Re(\alpha_s+\gamma_i)>0$, $i=1,2,\ldots n$. Elle représente $\bar{\varphi}_s(z)$ ou $\bar{g}_s^*(z)$ suivant que z est à l'intérieur ou à l'extérieur du contour. En particulier, si $\Re(\beta_n)>-1$, on aura donc

$$\bar{g}_s^*(z)=\frac{1}{\Gamma(\beta_n+1)}\int\limits_0^1\left(\frac{t}{z}\right)^{\alpha_s-1}\frac{\xi_n(t)}{z-t}\,dt \tag{10}$$

pour toute valeur de z qui n'appartient pas à l'intervalle $0\leq z\leq 1$.

Si β_n est un entier positif ou nul on trouvera de la même manière

$$\bar{g}_s^*(z) = -\frac{(-1)^{\beta_n}}{\Gamma(\beta_n+1)}\,\bar{\xi}_n(z)\log\frac{z-1}{z} + \bar{\varphi}_s(z), \tag{11}$$

$\bar{\varphi}_s(z)$ étant une fonction holomorphe au point $z=1$ qui se représente par la série

$$\bar{\varphi}_s(z) = -(-1)^{\beta_n} z^{-\alpha_s} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{g}_s'(\alpha_s+\nu)\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu}, \tag{12}$$

convergente dans le demi-plan $\Re(z) > \frac{1}{2}$. Il en résulte que

$$\bar{\varphi}_s(z) = \frac{(-1)^{\beta_n}}{\Gamma(\beta_n+1)\,2\pi i}\int_0^{(1+)}\left(\frac{t}{z}\right)^{\alpha_s-1}\frac{\bar{\xi}_n(t)}{t-z}\log\frac{t-1}{t}\,dt \tag{13}$$

si z est à l'intérieur du contour. Mais cette intégrale représente $\bar{g}_s^*(z)$ quand z est à l'extérieur du contour.

En dernier lieu, si β_n est un entier négatif, on obtient

$$\bar{g}_s^*(z) = -\eta_n(z)\log\frac{z-1}{z} + \bar{\varphi}_s(z),$$

où

$$\bar{\varphi}_s(z) = \Gamma(-\beta_n)\,z^{-\alpha_s}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\beta_n}\sum_{\nu=0}^{-\beta_n-1}\frac{\bar{c}_{\nu,n}^{(s)}}{(\beta_n+1)_\nu}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu}$$
$$-(-1)^{\beta_n} z^{-\alpha_s}\sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{g}_s'(\alpha_s+\nu)\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu}.$$

13. Considérons ensuite une fonction $\bar{G}_{s,j}(x)$, définie par la série hypergéométrique

$$\bar{G}_{s,j}(x) = \frac{\prod_{\nu=1}^{n}\Gamma(\alpha_s+\gamma_\nu)}{\Gamma(\alpha_s+\gamma_j)\prod_{\nu=1}^{n}\Gamma(\alpha_s-\alpha_\nu+1)}\,F\begin{pmatrix}\alpha_s+\gamma_1 & \alpha_s+\gamma_2 & \ldots & \alpha_s+\gamma_n & \alpha_s+x\\ \alpha_s-\alpha_1+1 & \alpha_s-\alpha_2+1 & * & \alpha_s-\alpha_n+1 & \alpha_s+\gamma_j\end{pmatrix}$$

où * indique que $\alpha_s-\alpha_s+1$ doit être omis. Cette série converge si $\Re(x) < \Re(\beta_n+\gamma_j)$. Elle représente une fonction méromorphe de x admettant comme pôles les points $\beta_n+\gamma_j+\nu$. Il résulte de l'analyse du paragraphe 10, par une permutation des lettres, que sous les conditions indiquées

$$\bar{G}_{s,j}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_{\nu,n}^{(j)}}{\Gamma(\alpha_s+\beta_n+\gamma_j+\nu)}\,\frac{1}{\beta_n+\gamma_j+\nu-x} -$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_s+\beta_n+\gamma_j)}\int_0^1 z^{\alpha_s-1}(1-z)^{-\alpha_s-x}\,\xi_{n-1}\left(\begin{matrix}\alpha_1\ldots\alpha_{s-1} & \alpha_{s+1}\ldots\alpha_n\\ \gamma_1\ldots\gamma_{j-1} & \gamma_{j+1}\ldots\gamma_n\end{matrix}\middle|\, z\right)dz.$$

En supposant qu'aucun des nombres $\alpha_s+\gamma_1$, $\alpha_s+\gamma_2$, ... $\alpha_s+\gamma_n$, $\alpha_s+\beta_n+\gamma_j$ ne soit un entier négatif ou nul, on obtient de même

$$\bar{g}_s^*(z)=\frac{z^{\gamma_j}}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}(z-1)^{x-\gamma_j}\Gamma(\gamma_j-x)\Gamma(x+\alpha_s)\bar{G}_{s,j}(x)\,dx,\quad j=1,2,\ldots n, \tag{14}$$

où le contour doit être choisi de manière à séparer les suites de pôles croissantes et décroissantes de la fonction sous le signe. Cette intégrale converge si $|\arg(z-1)|<\pi$. Il en résulte en particulier, si β_n n'est pas un entier, que la fonction $\bar{\varphi}_s(z)$ qui figure dans (7) se représente, dans le cercle $|z-1|<1$ par les séries

$$\bar{\varphi}_s(z)=\Gamma(\alpha_s+\gamma_j)\,z^{\gamma_j}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha_s+\gamma_j)_\nu}{\nu!}\bar{G}_{s,j}(\gamma_j+\nu)(1-z)^\nu,\quad j=1,2,\ldots n.$$

Enfin on voit comme au paragraphe 11 que la fonction $\bar{g}_s(x)$ admet les développements

$$\bar{g}_s(x)=\frac{\sin\pi\beta_n}{\pi}\frac{\Gamma(x+\gamma_j)}{\Gamma(x-\alpha_s+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha_s-x)_\nu}{\nu!}\bar{G}_{s,j}(\gamma_j+\nu).$$

Ces séries convergent si $\Re(x+\gamma_i)>0$, $i=1,2,\ldots n$, $i\neq j$.

Revenons à la relation (16) § 3. En y substituant l'expression

$$\frac{\bar{\xi}_n(z)}{\Gamma(\beta_n+1)}=\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{n}\bar{B}_r\,\bar{g}_r^*(z)$$

et en intégrant terme à terme on obtient

$$g_s(x)=\Gamma(\gamma_s-x)\frac{\sin\pi(\beta_n+\gamma_s-x)}{\pi^2}\sum_{r=1}^{n}\bar{B}_r\Gamma(x+\alpha_r)\bar{G}_{r,s}(x). \tag{15}$$

De la même manière en substituant l'expression

$$\frac{\xi_n(z)}{\Gamma(\beta_n+1)}=\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{n}B_r\,g_r^*(z)$$

dans l'équation (2) on trouvera

$$\bar{g}_s(x)=\Gamma(\alpha_s-x)\frac{\sin\pi(\alpha_s+\beta_n-x)}{\pi^2}\sum_{r=1}^{n}B_r\Gamma(x+\gamma_r)G_{r,s}(x), \tag{16}$$

B_r et $\bar{B}_r$ étant les constantes (8) § 1. Les relations (15) et (16) se déduisent aussi aisément de (6) et (7) § 1.

14. Dans ce qui précède nous avons supposé que $\alpha_s+\gamma_i$ n'est pas un entier négatif ou nul. Si cette condition n'est pas satisfaite on ne peut pas tracer un contour de la nature indiquée, et les représentations par des intégrales que nous avons con-

sidérées sont en défaut. Mais ce cas est trivial parce que les séries hypergéométriques en question se réduisent à un nombre fini de termes. Par exemple, si $\alpha_1+\gamma_1 = -p$, p étant un entier positif, $z^{-\gamma_1} y_1(z)$ est un polynôme en z du degré p et on a $y_1(z) = C\,\bar{y}_1(z)$, C étant la constante

$$C = (-1)^{pn} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{(\alpha_\nu+\gamma_1)_p}{(\alpha_1+\gamma_\nu)_p}.$$

En outre la solution $y_1(z)$ peut s'écrire sous les deux formes suivantes

$$y_1(z) = C z^{\gamma_1} \sum_{\nu=0}^{p} \binom{p}{\nu} F\begin{pmatrix} \nu-p & \alpha_1+\gamma_2 & \alpha_1+\gamma_3 \ldots \alpha_1+\gamma_n \\ \alpha_1-\alpha_2+1 & \alpha_1-\alpha_3+1 & \ldots \quad \alpha_1-\alpha_n+1 \end{pmatrix} (z-1)^\nu$$

$$= z^{-\alpha_1} \sum_{\nu=0}^{p} \binom{p}{\nu} F\begin{pmatrix} \nu-p & \alpha_2+\gamma_1 & \alpha_3+\gamma_1 \ldots \alpha_n+\gamma_1 \\ \gamma_1-\gamma_2+1 & \gamma_1-\gamma_3+1 & \ldots \quad \gamma_1-\gamma_n+1 \end{pmatrix} \left(\frac{1-z}{z}\right)^\nu.$$

Si β_n est un entier négatif ou un entier positif $> n-1$ il peut évidemment arriver que le terme logarithmique disparaisse dans toutes les solutions. Concernant ce cas d'exception je me borne à renvoyer à mon mémoire des Acta mathematica t. 94 (1955), p. 345–6.

Chapitre IV.

15. Soient r et s deux entiers positifs $\leq n$ et différents l'un de l'autre. Admettons qu'aucun des nombres $\alpha_\nu+\gamma_r$ et $\alpha_\nu+\gamma_s$, $\nu = 1, 2, \ldots n$ ne soit un entier négatif ou nul. Nous allons considérer la fonction $y_{s,r}(z)$ définie par la relation

$$y_r^*(z) - y_s^*(z) = \frac{\sin\pi(\gamma_s-\gamma_r)}{\pi}\, y_{s,r}(z). \tag{1}$$

Elle est holomorphe au point $z = 1$ et l'on a

$$y_{s,r}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} \frac{z^t\,\Gamma(\gamma_r-t)\,\Gamma(\gamma_s-t) \prod\limits_{\nu=1}^{n} \Gamma(t+\alpha_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1\,\nu\neq r,s}^{n} \Gamma(t-\gamma_\nu+1)}\, dt, \tag{2}$$

où le contour doit être choisi de manière à séparer les suites croissantes et décroissantes de pôles de la fonction sous le signe. Cette intégrale converge si $|\arg z| < 2\pi$. Soit comme plus haut $f_{s,r}(x)$ la fonction qu'on déduit de $y_{s,r}(1)$ quand on remplace γ_s par x. En dérivant par rapport à z on obtient

$$(-1)^\nu \left(\frac{d^\nu\, z^{-\gamma_s} y_{s,r}(z)}{dz^\nu}\right)_{z=1} = f_{s,r}(\gamma_s+\nu).$$

De la formule de Taylor il résulte donc

$$
\begin{aligned}
y_{s,r}(z) &= z^{\gamma_s} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_{s,r}(\gamma_s+\nu)}{\nu!}(1-z)^{\nu} \\
&- z^{\gamma_r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_{r,s}(\gamma_r+\nu)}{\nu!}(1-z)^{\nu}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

et ces deux séries convergent quand $|z-1|<1$. Considérons l'intégrale

$$
\frac{z^{\gamma_s}}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}(z-1)^{x-\gamma_s}\,\Gamma(\gamma_s-x)\,f_{s,r}(x)\,dx, \tag{4}
$$

où le contour doit être choisi de manière à laisser les pôles $\gamma_s+\nu$ à droite, les autres pôles à gauche. La fonction $f_{s,r}(x)$ se représente en vertu de (26) § 1 par la série

$$
f_{s,r}(x) = C\,\Gamma(x-\gamma_r+1)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1+\gamma_r)_{\nu}}{(x+\alpha_1)_{\nu+1}}\,F\begin{pmatrix} -\nu & \alpha_2+\gamma_r & \alpha_3+\gamma_r \ldots \alpha_n+\gamma_r \\ \gamma_r-\gamma_1+1 & \gamma_r-\gamma_2+1 & * \;\; \gamma_r-\gamma_n+1\end{pmatrix},
$$

où * indique que $\gamma_r-\gamma_s+1$ doit être omis. Cette série converge si $\Re(x+\alpha_i)>0$, $i=2, 3, \ldots n$. De même nous avons le développement (25) § 4:

$$
f_{s,r}(x) = C\,\frac{\Gamma(x+\alpha_1)\,\Gamma(x+\alpha_2)}{\Gamma(x+\alpha_1+\alpha_2+\gamma_r)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1+\gamma_r)_{\nu}(\alpha_2+\gamma_r)_{\nu}}{\nu!\,(x+\alpha_1+\alpha_2+\gamma_r)_{\nu}}\,F\begin{pmatrix} -\nu & \alpha_3+\gamma_r \ldots \alpha_n+\gamma_r \\ \gamma_r-\gamma_1+1 & ** \;\; \gamma_r-\gamma_n+1\end{pmatrix}, \tag{5}
$$

C étant dans les deux cas la constante

$$
C = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\Gamma(\alpha_\nu+\gamma_r)}{\prod\limits_{\nu=1,\,\nu\neq s}^{n}\Gamma(\gamma_r-\gamma_\nu+1)}. \tag{6}
$$

La série de facultés (5) converge, si $\Re(x+\alpha_i)>0$, $i=3, 4, \ldots n$, et elle nous montre comment se comporte la fonction $f_{s,r}(x)$ pour les valeurs très grandes de x. On a en effet dans le demi-plan de convergence

$$
\Gamma(\gamma_s-x)\,f_{s,r}(x) = C\,\frac{\pi x^{\gamma_s-\gamma_r-1}}{\sin\pi(\gamma_s-x)}(1+o(1)). \tag{7}
$$

En permutant γ_r et x dans le second membre de (5) on trouvera une nouvelle série de fonctions rationnelles, représentant $f_{s,r}(x)$ et convergente si $\Re(\alpha_i+\gamma_r)>0$. Il en résulte que $f_{s,r}(x)$ est une fonction méromorphe de x admettant comme pôles les points $-\alpha_i-\nu$, $i=1, 2, \ldots n$. L'équation (1) nous donne l'expression suivante

$$f_{s,r}(x) = \frac{\pi}{\sin\pi(x-\gamma_r)}\left[\frac{C}{\Gamma(\gamma_r - x + 1)} F\begin{pmatrix} \alpha_1+\gamma_r & \alpha_2+\gamma_r & \dots & \alpha_n+\gamma_r \\ \gamma_r - x + 1 & \gamma_r-\gamma_1+1 & ** & \gamma_r-\gamma_n+1\end{pmatrix}\right.$$

$$\left. - \frac{\prod_{\nu=1}^{n}\Gamma(x+\alpha_\nu)}{\prod_{\nu=1,\,\nu\neq s}^{n}\Gamma(x-\gamma_\nu+1)} F\begin{pmatrix} x+\alpha_1 & x+\alpha_2 & \dots & x+\alpha_n \\ x-\gamma_1+1 & x-\gamma_2+1 & * & x-\gamma_n+1\end{pmatrix}\right],$$

où les deux séries convergent si $\Re(x) < \Re(\beta_n + \gamma_s)$. Il en résulte que l'égalité asymptotique (7) est vraie dans l'angle $\pi - \varepsilon > \arg x > -\pi + \varepsilon$, ε étant positif. L'intégrale (4) converge par conséquent si $|\arg(z-1)| < \pi$. Quand $|z-1| < 1$ on voit comme au paragraphe 7 qu'elle est le produit de $-2\pi i$ par la somme des résidus relatifs aux pôles situés à droite du contour, c'est-à-dire égale à la série (3). On a donc

$$y_{s,r}(x) = \frac{z^{\gamma_s}}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} (z-1)^{x-\gamma_s}\,\Gamma(\gamma_s - x)\, f_{s,r}(x)\,dx. \tag{8}$$

En permutant s et r on trouve

$$y_{s,r}(x) = \frac{z^{\gamma_r}}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} (z-1)^{x-\gamma_r}\,\Gamma(\gamma_r - x)\, f_{r,s}(x)\,dx,$$

où les pôles $\gamma_r + \nu$ sont à droite, les autres pôles à gauche du contour.

16. Soit $h_j(x)$ la fonction qu'on déduit de $y_{s,r}(1)$ quand on remplace α_j par x. On a donc

$$\frac{\sin\pi(\gamma_s-\gamma_r)}{\pi} h_j(x) = \Gamma(x+\gamma_r)\,G_{r,j}(x) - \Gamma(x+\gamma_s)\,G_{s,j}(x).$$

Il en résulte que $h_j(x)$ admet les pôles $-\gamma_r - \nu$ et $-\gamma_s - \nu$. En tenant compte de (23) § 10 on voit qu'elle est holomorphe pour toute autre valeur finie de x. En vertu de (28) § 10 on a

$$y_{s,r}(z) = \frac{z^{-\alpha_j}}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \left(\frac{1-z}{z}\right)^{x-\alpha_j} \Gamma(\alpha_j - x)\, h_j(x)\,dx, \quad j = 1, 2, \dots n, \tag{9}$$

les pôles $\alpha_j + \nu$ étant à droite, les autres pôles à gauche du contour. Or il résulte du paragraphe 9 qu'on a l'égalité asymptotique

$$\Gamma(\alpha_j - x)\, h_j(x) = \frac{\pi}{\sin\pi(\alpha_j - x)} \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} C_i\, x^{\alpha_j - \alpha_i - 1}(1 + o(1)), \tag{10}$$

les C_i étant des constantes. De la même manière qu'au paragraphe 7 on en conclut que

$$y_{s,r}(z) = z^{-\alpha_j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_j(\alpha_j + \nu)}{\nu!} \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\nu}, \quad j = 1, 2, \dots n, \tag{11}$$

ces séries étant convergentes dans le demi-plan $\Re(z) > \frac{1}{2}$. Pour les coefficients qui y figurent on a en vertu de (10) l'expression asymptotique suivante

$$\frac{h_j(\alpha_j + \nu)}{\nu!} = \sum_{i=1,\, i \neq j}^{n} C_i \, \nu^{\alpha_j - \alpha_i - 1} (1 + o(1)).$$

Considérons en particulier la fonction $h_1(x)$. Elle se représente en vertu de (27) § 1 par la série de fractions rationnelles

$$h_1(x) = C\,\Gamma(x + \gamma_s) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\gamma_r - \gamma_s + 1)_\nu}{\nu!\,(x + \gamma_r + \nu)} F\begin{pmatrix} -\nu & \alpha_2 + \gamma_r & \alpha_3 + \gamma_r \dots \alpha_n + \gamma_r \\ \gamma_r - \gamma_1 + 1 & \gamma_r - \gamma_2 + 1 & * \quad \gamma_r - \gamma_n + 1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

où * veut dire que $\gamma_r - \gamma_r + 1$ doit être omis et C étant la constante

$$C = \frac{\prod_{\nu=2}^{n} \Gamma(\alpha_\nu + \gamma_r)}{\prod_{\nu=1,\, \nu \neq s}^{n} \Gamma(\gamma_r - \gamma_\nu + 1)}. \tag{13}$$

Le résidu au pôle $-\gamma_r - \nu$ ressort immédiatement de cette belle formule. De l'équation (26) § 1 on tire

$$h_1(x) = C\,\Gamma(x + \gamma_r)\,\Gamma(\gamma_s - \gamma_r + 1) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x + \gamma_r)_\nu}{(x + \gamma_s)_{\nu+1}} F\begin{pmatrix} -\nu & \alpha_2 + \gamma_r & \dots & \alpha_n + \gamma_r \\ \gamma_r - \gamma_1 + 1 & \dots * \dots & \gamma_r - \gamma_n + 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

où * exprime que $\gamma_r - \gamma_s + 1$ doit être omis. Les séries (12) et (14) convergent si $\Re(\alpha_i + \gamma_s) > 0$, $i = 2, 3, \dots n$. De même il résulte de (25) § 1 que

$$h_1(x) =$$

$$C \frac{\Gamma(x + \gamma_r)\,\Gamma(x + \gamma_s)\,\Gamma(\alpha_2 + \gamma_s)}{\Gamma(x + \alpha_2 + \gamma_r + \gamma_s)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x + \gamma_r)_\nu\,(\alpha_2 + \gamma_r)_\nu}{\nu!\,(x + \alpha_2 + \gamma_r + \gamma_s)_\nu} F\begin{pmatrix} -\nu & \alpha_3 + \gamma_r \dots \alpha_n + \gamma_r \\ \gamma_r - \gamma_1 + 1 & ** \; \gamma_r - \gamma_n + 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

les deux astérisques indiquant que $\gamma_r - \gamma_r + 1$ et $\gamma_r - \gamma_s + 1$ doivent être omis. La série (15) converge si $\Re(\alpha_i + \gamma_s) > 0$, $i = 3, 4, \dots n$ et C est toujours la même constante (13). On obtient $h_j(x)$ en remplaçant α_j par α_1 dans $h_1(x)$. On peut donc déduire aisément des séries (12), (14) et (15) les séries correspondantes représentant $h_j(x)$. On vérifie sur ces développements que $h_j(x)$ n'admet que les pôles $-\gamma_r - \nu$ et $-\gamma_s - \nu$.

En résolvant l'équation (9) par rapport à $h_j(x)$ on obtient

$$h_j(x) = \frac{\Gamma(x - \alpha_j + 1)}{2\pi i} \int_0^{(1+)} z^{x-1} (z-1)^{\alpha_j - x - 1} y_{s,r}(z)\, dz, \quad j = 1, 2, \dots n$$

et ces intégrales convergent si $\Re(x+\gamma_r)>0$ et $\Re(x+\gamma_s)>0$. En y substituant la série (3) et en intégrant terme à terme on trouvera

$$h_j(x)=\frac{\Gamma(x+\gamma_s)}{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f_{s,r}(\gamma_s+\nu)(\alpha_j-x)_\nu}{\nu!(\alpha_j+\gamma_s)_\nu}$$

et cette série converge si $\Re(x+\gamma_r)>0$. On arrive à la relation inverse en tirant $f_{s,r}(x)$ de l'équation (8) ce qui donne

$$f_{s,r}(x)=\frac{\Gamma(x-\gamma_s+1)}{2\pi i}\int_{\infty}^{(1-)} z^{-\gamma_s}(1-z)^{\gamma_s-x-1}\,y_{s,r}(z)\,dz.$$

Cette intégrale converge si $\Re(x+\alpha_i)>0$, $i=1,2,\ldots n$. En y substituant la série (11) et en intégrant terme à terme il vient

$$f_{s,r}(x)=\frac{\Gamma(x+\alpha_j)}{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{h_j(\alpha_j+\nu)(\gamma_s-x)_\nu}{\nu!(\alpha_j+\gamma_s)_\nu},\qquad j=1,2,\ldots n,$$

ces séries étant convergentes si $\Re(x+\alpha_i)>0$, $i=1,2,\ldots n$, $i\neq j$. Ajoutons que les relations démontrées dans ce paragraphe subsistent si l'on permute s et r.

Bibliographie.

[1]. W. N. Bailey, *Generalized Hypergeometric Series*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 32 (1935).

[2]. E. W. Barnes, The asymptotic expansion of integral functions defined by generalised hypergeometric series. *Proc. London Math. Soc.* (2), 5 (1907), 59–116.

[3]. ——, A new development of the theory of the hypergeometric functions. *Proc. London Math. Soc.* (2), 6 (1908), 141–177.

[4]. ——, A transformation of generalized hypergeometric series. *Quart. J. Math.* 41 (1910), 136–140.

[5]. T. J. I'A. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series*. London 1926.

[6]. T. W. Chaundy, An extension of hypergeometric functions. *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. 14 (1943), 55–78.

[7]. E. T. Copson, *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*. Oxford 1935, 233–271.

[8]. G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Berlin, 1937.

[9]. ——, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Band I–II. Basel, 1950–53.

[10]. A. Erdélyi, Der Zusammenhang zwischen verschiedenen Integraldarstellungen hypergeometrischer Funktionen. *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. 8 (1937), 200–213.

[11]. ——, Integraldarstellungen hypergeometrischer Funktionen. *Quart. J. Math.*, Oxford. Ser. 8 (1937), 267–277.

[12]. ——, *Higher Transcendental Functions 1–3, Based, in Part, on Notes left by Harry Bateman and Compiled by the Staff of the Bateman Manuscript Project*. New York 1953–55.

[13]. ——, *Tables of Integral Transforms*. 1–2. New York 1954.

[14]. C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\ldots.$ *Werke* 3, 123–162, Göttingen 1876.

[15]. ——, Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis. *Werke* 3, 207–230.

[16]. E. Goursat, Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéometrique. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (2), 10 (1881), 3–142.

[17]. ——, Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (2), 12 (1883), 261–286, 395–430.

[18]. ——, Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies. *Acta Math.*, 2 (1883), 1–70.

[19]. ——, Sur une classe d'intégrales doubles. *Acta Math.*, 5 (1884), 97–120.

[20]. ——, *Leçons sur les séries hypergéométriques*. Paris 1936.

[21]. G. H. Hardy, A. chapter from Ramanujan's note-book. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 21 (1923), 492–503.

[22]. ——, *Ramanujan, Twelve Lectures on Subjects Suggested by his Life and Work*. Cambridge 1940, 101–112.

[23]. F. Klein, *Vorlesungen über die hypergeometrische Function, herausgegeben von O. Haupt.* Berlin 1933.

[24]. E. Lindelöf, Sur l'intégration de l'équation différentielle de Kummer. *Acta Soc. Scient. Fennicæ*, 19 (1893), 3–31.

[25]. ——, *Le calcul des résidus.* Paris 1905.

[26]. T. M. MacRobert, Induction proofs of the relations between certain asymptotic expansions and corresponding generalised hypergeometric series. *Proc. Roy. Soc. Edinburg*, 58 (1937), 1–13.

[27]. ——, *Functions of a Complex Variable.* London 1954.

[28]. J. Malmquist, V. Stenström, and S. Danielson, *Matematisk analys II.* Stockholm 1952.

[29]. L. E. Mehlenbacher, The interrelations of the fundamental solutions of the hypergeometric equation. *Amer. J. Math.*, 60 (1938), 120–128.

[30]. C. S. Meijer, Multiplikationstheoreme für die Funktion $G^{m,n}_{p,q}(z)$ *Indagationes Math.*, 3 (1941), 386–494.

[31]. ——, On the *G*-function. *Indagationes Math.*, 8 (1946), 124–134; 213–225; 312–324; 391–400; 468–475; 595–602; 661–670; 713–723.

[32]. ——, Expansion theorems for the *G*-function. *Indagationes Math.*, 14–18 (1952–56).

[33]. Hj. Mellin, Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen. *Acta Math.*, 9 (1887), 137–166.

[34]. ——, Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung. *Acta Math.*, 15 (1891), 317–384.

[35]. ——, Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen. *Acta Soc. Scient. Fennicæ*, 21 (1896).

[36]. ——, Über gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten, *Acta Soc. Scient. Fennicæ*, 21 (1896).

[37]. ——, Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Functionen von endlichem Geschlecht. *Acta Soc. Scient. Fennicæ*, 29 (1900).

[38]. ——, Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen. *Acta Math.*, 25 (1902), 139–164.

[39]. ——, Grundzüge einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen. *Annales Acad. Scient: Fennicæ* A, 1 (1909).

[40]. ——, Abriss einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen. *Math. Ann.* 68 (1910), 305–337.

[41]. A. Michaelsen, *Der logarithmische Grenzfall der hypergeometrischen Differentialgleichung n-Ordnung.* Diss., Kiel 1889.

[42]. N. E. Nørlund, Fractions continues et différences réciproques. *Acta Math.*, 34 (1911), 1–108.

[43]. ——, Sur une classe de fonctions hypergéométriques. *Bull. Acad. Sci. Danemark* 1913, 135–153.

[44]. ——, Sur les séries de facultés, *Acta Math.*, 37 (1914), 327–387.

[45]. ——, *Leçons sur les séries d'interpolation.* Paris 1926.

[46]. ——, Hypergeometriske Funktioner. *Mat. Tidsskr.* B (1950), 18–21.

[47]. ——, Séries hypergeométriques, *Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund*, 21 (1952).

[48]. ——, Sur les fonctions hypergéométriques. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 237 (1953), 1371–1373; 1466–1468.

[49]. ——, Über hypergeometrische Funktionen. *Arch. Math.*, 5 (1954), 258–265.

[50]. ——, Hypergeometric Functions. *Acta Math.*, 94 (1955), 289–349.

[51]. O. Perron, Über das Verhalten von $f^{(\nu)}(x)$ für $\lim \nu = \infty$ wenn $f(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt. *S.-B. Kl. Bayer. Akad. Wiss.* 1913, 355–382.

[52]. ——, Über das Verhalten der hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines oder mehrerer Parameter. *S.-B. Heidelberger Akad. Wiss.* 1916, A. 9.

[53]. S. Pincherle, Sopra una trasformazione delle equazioni differenziale lineari in equazioni alle differenze, e vice versa. *Rendiconti del R. Istituto Lombardo* (2), 19 (1886).

[54]. ——, Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni. *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna* (4), 8 (1887), 125–144.

[55]. Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate. *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend.* (4), 4 (1888), 694–700, 792–799.

[56]. ——, Contributo alla integrazione delle equazioni differenziali lineari mediante integrali definiti. *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna* (5), 2 (1892).

[57]. ——, Delle funzioni ipergeometriche. *Giorn. Mat. Battaglini*, 32 (1894), 209–291.

[58]. ——, Sull'inversione degl'integrali definiti. *Mem. Soc. Ital. Sci.* (3), 15 (1907).

[59]. L. Pochhammer, Über die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten. *J. reine angew. Math.*, 102 (1888), 76–159.

[60]. B. Riemann, Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen. *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig 1892, 67–87.

[61]. ——, Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe. *G.m.W. Nachträge*, Leipzig 1902, 69–94.

[62]. F. C. Smith, Relations among the fundamental solutions of the generalized hypergeometric equation when $p = q + 1$. I. Non-logarithmic cases. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44 (1938), 429–433.

[63]. ——, On the logarithmic solutions of the generalized hypergeometric equation when $p = q + 1$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45 (1939), 629–636.

[64]. ——, Relations among the fundamental solutions of the generalized hypergeometric equation when $p = q + 1$. II. Logarithmic cases. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45 (1939), 927–935.

[65]. J. Thomae, Über die höheren hypergeometrischen Reihen, *Math. Ann.*, 2 (1870), 427–444.

[66]. ——, Über Funktionen welche durch Reihen von der Form dargestellt werden $1 + \frac{p}{1}\frac{p'}{q'}\frac{p''}{q''} + \cdots$, *J. reine angew. Math.*, 87 (1879), 26–73.

[67]. E. C. Titchmarsh, The Theory of Functions. Oxford 1932.

[68]. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis.* Cambridge 1946.

[69]. E. T. Whittaker, On the Solution of Differential Equations by Definite Integrals. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), 2 (1931), 189–204.

[70]. E. Winkler, *Über die hypergeometrische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit zwei endlichen singulären Punkten.* Diss. München 1931.

[71]. A. Winter, *Über die logarithmischen Grenzfälle der hypergeometrischen Differentialgleichungen.* Diss. Kiel 1905.

Indleveret til selskabet den 30. juli 1956.
Færdig fra trykkeriet den 28. november 1956.

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab

Matematisk-fysiske Skrifter

Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk.

Bind **1**

(uafsluttet / en cours de publication) kr. ø.

Printed in Denmark
Bianco Lunos Bogtrykkeri A-S